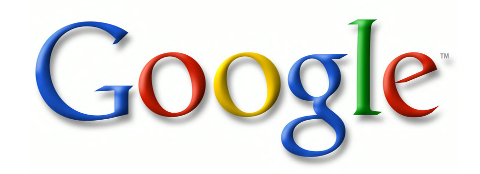






GRUNDRISS

DER

THEORETISCHEN ASTRONOMIE

UND DER

GESCHICHTE DER PLANETENTHEORIEN

VON

DR. JOHANNES FRISCHAUF

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GRAZ

ZWEITE, VERMEHRTE AUFLAGE

MIT 22 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1903

Vorwort zur ersten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, welche meine vor drei Jahren erschienene »Theorie der Bewegung der Himmelskörper« erfuhr, und die Aufforderung von Seite der Verlagshandlung zur Bearbeitung einer neuen Auflage ermunterten mich, dieselbe durch eine Reihe von Arbeiten aus dem Gebiete der theoretischen Astronomie, mit welchen ich mich mehrere Jahre hindurch beschäftigt hatte, zum vorliegenden »Grundriß« zu ergänzen. Übrigens habe ich den unter dem oben erwähnten Titel erschienenen Teil, dessen Inhalt hauptsächlich in der Gaußschen Bahnbestimmung aus drei Orten und der Olbersschen Methode besteht, durch weitläufigere Ausführung der Zwischenrechnungen, Erläuterung einzelner dunkler Stellen, Vermehrung der Beispiele und Anmerkungen vollständig umgearbeitet. In den hinzugefügten Partien ist die Gaußsche Bahnbestimmung aus vier Orten, die Bahnbestimmungen aus einer größeren Reihe von Beobachtungen, die Berücksichtigung der Korrektionen und der Störungen und endlich die Geschichte der Planetentheorien gegeben. Die Aufnahme der Gaußschen Bahnbestimmung aus vier Orten konnte um so leichter geschehen, da ich bereits in meiner Th. d. B. die Bahnbestimmung aus drei Orten nach dieser Methode umgeformt hatte. Die Berechnung der speziellen Störungen nach Encke dürfte auch in nicht astronomischen Kreisen, in welchen sie vielleicht wenig

bekannt sein dürfte, Beachtung finden. Hinsichtlich der Geschichte der Planetentheorien habe ich mir zum Zweck gesetzt, die leider so wenig bekannte Entdeckungsgeschichte der Keplerschen Gesetze weiteren Kreisen zugänglich zu machen und in das Studium der Keplerschen Werke, welches gegenwärtig durch die treffliche Gesamtausgabe von Chr. Frisch sehr erleichtert ist, einzuführen. Für das Verständnis dieser Entdeckungsgeschichte ist jedoch auch die Darstellung der Theorien von Ptolemäus und Kopernikus unerläßlich. Über die Würdigkeit der Aufnahme dieses Teiles war ich nicht einen Moment im Zweifel; ich glaube sogar, daß diese Partien dem Interessantesten in der Geschichte der Wissenschaften anzureihen seien.

Getreu der ursprünglichen Bestimmung meiner Th. d. B., dieses Buch Studierenden der mathematischen Physik zu widmen, habe ich manches für den Fachastronomen Interessante absichtlich unterdrückt. Solches kann leicht aus den Quellen oder Zeitschriften nachgelesen werden.

Die dem Inhaltsverzeichnisse — dessen Bearbeitung ich Herrn Albert v. Ettingshausen, Assistent der Physik an der hiesigen Universität, verdanke — beigegebene Literaturangabe bezieht sich nur auf die bei der Ausarbeitung dieses Buches benutzten Schriften.

Bei der Korrektur fand ich überdies an den Herren Albert v. Ettingshausen und Johann Gerst die freundlichste Unterstützung, wofür ich ihnen meinen innigsten Dank ausspreche.

Graz, im März 1871.

J. Frischauf.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage schließt sich in der Anlage vollkommen der ersten an. Da dieser Grundriß hauptsächlich für den ersten Unterricht in theoretischer Astronomie bestimmt ist, als solcher seinerzeit großen Beifall und allgemeine Zustimmung gefunden hat, so wurden im ersten und zweiten Teile im Haupttexte keine wesentlichen Änderungen vorgenommen, sondern nur zum Zwecke des leichteren Verständnisses einzelne Stellen erweitert.

Dagegen wurde für diese beiden Teile der Anhang bedeutend vermehrt. Besonders möge auf drei größere Zusätze hingewiesen werden, die auch für Fachastronomen Interesse besitzen dürften. Der erste betrifft die Lösung der Aufgaben bezüglich der Bewegung eines Himmelskörpers in einer Hyperbel durch die Einführung der Hyperbelfunktionen, die der Verfasser bereits in Nr. 2980 (1890) der »Astronomischen Nachrichten« im Umrisse mitgeteilt hat. Es ist geradezu auffallend, daß die Hyperbelfunktionen gegenwärtig in der theoretischen Physik, trotzdem seit nahezu zwanzig Jahren in der technischen Mechanik davon ein umfassender Gebrauch gemacht wird, fast gar keine Verwendung finden. Es wäre sehr wünschenswert, und es würde auch vollauf genügen, wenn, wie es hier im Anhange geschehen ist, in den Lehrbüchern der Analysis auf einigen

Seiten die Definitionen und Hauptsätze der Hyperbelfunktionen mitgeteilt würden, mittels welcher dann nach der Lösung einer Reihe von Aufgaben für die Ellipse die auf die Hyperbel bezüglichen fast ohne Rechnung nur abgeschrieben werden können. Statt dessen quält man sich, nachdem man die Ellipsenaufgaben gelöst hat, neuerdings mit analytischen Entwicklungen für die Hyperbel, in denen dann statt der kompendiösen durchsichtigen Hyperbelfunktionen, durch welche die vollständige Analogie der Ellipsen- und Hyperbelsätze und Aufgaben ersichtlich wird, unbequeme logarithmische Ausdrücke vorkommen. Die zweite größere Note des Anhanges enthält die Verbesserung der Gaußschen Größen P und Q bei der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen für die erste Hypothese. An den drei von Gauß in der »Theoria motus« gegebenen Beispielen wurde der Nutzen dieser Verbesserung der Größen P und Q erprobt. Ein dritter größerer Zusatz gibt eine sehr einfache Ableitung der Gibbsschen Ausdrücke für die Dreiecksverhältnisse, ohne Benützung der Theorie der »Vektoren«, sowie deren Verwendung zur Bahnbestimmung.

Trotz der günstigen Anzeigen der ersten Auflage, von denen besonders die des Herrn Geh. Reg.-Rats Dr. F. R. Helmert in der »Zeitschrift für Mathematik und Physik« (19. Jahrgang) und jene im »Literarischen Centralblatt für Deutschland« (Jahrgang 1872) zu erwähnen sind, und wo in letzterer gesagt wird: »Der dritte historische Teil wird auch der jetzigen Schule von Astronomen sehr zu statten kommen,« hat der in Art. 16 (S. 37) vorgenommene Ersatz der Gleichung achten Grades durch eine andere leichter zu lösende bisher keine Beachtung gefunden, wo bereits für deren Auflösung A. de Gasparis in den »Astronomischen Nachrichten« Nr. 1101 sogar eine allerdings nur wenig

Nutzen gewährende Tafel gegeben hat. Abgesehen davon, daß aus der Gleichung (11) des Verfassers die Unbekannte x' viel leichter zu bestimmen ist und überdies eine der Aufgabe fremde Wurzel vermieden wird, als die Gaußsche x aus der Gleichung (IV) des Art. 141 der »Theoria motus«, so wird diese letztere Gleichung strenge genommen erst aus der des Verfassers erhalten.

Vielfach wurde in den Anzeigen der ersten Auflage der Wunsch geäußert, der Verfasser möge in einer neuen Ausgabe auch einzelne Probleme aus der Mechanik des Himmels, besonders Präzession, aufnehmen. Im Interesse der Wahrung des elementaren Charakters des Buches und der Beschränkung auf theoretische Astronomie ist dies wieder nicht geschehen. Freunde dieser Untersuchungen und alle jene, die sich für spezielle Fragen aus der theoretischen Astronomie interessieren, mögen auf die ausführliche von Herrn Dr. H. Buchholz besorgte zweite Auflage von Klinkerfues »Theoretische Astronomie« (Braunschweig 1899) verwiesen werden. Für die praktischen Berechnungen können die »Tafeln zur theoretischen Astronomie« von Julius Bauschinger (Leipzig 1901) mit bestem Erfolge benutzt werden.

Graz, im Februar 1903.

Johannes Frischauf.

Inhalt.

Erster Teil.

Beziehungen zwischen den die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmenden Größen.

Erster Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes in der Bahn.

Literatur.

1) Das erste und zweite Keplersche Gesetz ist enthalten in der »Astronomia nova ... a Joanne Keplero« 1609 (gedruckt zu Heidelberg), das dritte Gesetz in des »Joannis Kepleri Harmonices mundi libri V, Lincii, 1619«. III. u. V. Band der Frischschen Ausgabe.

2) Eine andere Ableitung der Gleichung (7) gibt Möbius, Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig, 1843. Die hier gegebene Ableitung dieser Gleichung ist die Übertragung des Vorganges von Kepler.

3) Gauß, Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Hamburgi, 1809. (Deutsch von Haase, 1865.) Neue Ausgabe, 7. Bd. Gauß' Werke, Gotha, 1871. Über Gravitationsmaß und Gaußsches Massen- und Zeitmaß siehe Dr. Felix Auerbach, »Kanon der Physik«, Leipzig, 1899.

4) Olbers, Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Kometen zu berechnen. Zum erstenmal von F. v. Zach, Weimar, 1797, zum zweitenmal von Encke 1847 und zum drittenmal von Galle 1864, enthält nebst anderen Hilfstafeln die Barkersche Tafel in vollständiger Weise.

Zweiter Abschnitt.

Beziehungen zwischen mehreren Orten in der Bahn.

Dritter Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes im Raume[8].

Vierter Abschnitt.

Beziehungen zwischen mehreren Orten im Raume[9].

5) Lösung von Gauß. Eine genäherte Lösung dieser wichtigen Aufgabe enthält bereits Eulers Theoria motuum planetarum et cometarum, Berolini 1744. (Deutsch von Pacassi, Wien, 1781.)

6) Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch für 1833.

7) Gauß, Theoria motus, art. 82.

8) Gauß, Theoria motus, zweiter Abschnitt des 1. B.

9) Gauß, Theoria motus, vierter Abschnitt des 1. B. und Encke, Berl. astr. J. für 1854.

Zweiter Teil.

Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei geozentrischen Beobachtungen[10]).

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei geozentrischen Beobachtungen nach der Methode von Olbers[11]).

---

10) Die einleitenden Bemerkungen des Art. 15. sind nach Gauß Theoria motus, art. 115, 131—135, die Umformung der Gleichung (1) durch die Größen J und K nach Encke Berl. astr. J. für 1854 gegeben. Die Einführung der Größen P und Q rührt von Gauß her. Die Lösung in dem Art. 16. ist dem Gaußschen Vorgange der Bahnbestimmung aus vier Orten angepaßt.

11) Olbers, Abhandlung ... und Encke, Berl. astr. J. für 1833.

Dritter Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus vier geozentrischen Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind[12]).

Vierter Abschnitt.

Über die Vorbereitungsrechnungen bei Bahnbestimmungen[13]).

Fünfter Abschnitt.

Bahnbestimmungen aus einer größeren Reihe von Beobachtungen[14]).

12) Gauß, Theoria motus, zweiter Abschnitt des 2. B.

13) Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Berlin, 1852; zweite Auflage 1862, und Gauß, Theoria motus, zweiter Abschnitt, und Beispiel art. 150.

14) Frischauf, Bahnbestimmung des Planeten Asia. Sitzungsberichte der kais. Akademie der W., Bd. LIII. Gauß, Theoria motus. Euler, Theoria motuum. Olbers, Abhandlung.

Sechster Abschnitt.

Bahnbestimmung mit Berücksichtigung der Störungen[15]).

Dritter Teil.

Geschichte der Planetentheorien.

Erster Abschnitt.

Ältere Theorien[16]).

15) Encke, Berl. astr. J. für 1837, 1838, 1857, 1858. Über die bei den Störungsrechnungen angewandte Quadratur vergl. Encke in den Berl. astr. J. für 1837, 1858, 1862 und Airy, Nautical Almanac für 1856. Nach einer Mitteilung Enckes sind diese Formeln der mechanischen Quadratur von Gauß.

16) Die homozentrischen Sphären des Eudoxus, des Kallippus und des Aristoteles. Mémoire, gelesen im lombardischen Institute zu Mailand am 26. November 1874 von G. V. Schiaparelli. Deutsch von W. Horn im Supplement des XXII. Jahrganges der »Zeitschrift für Mathematik und Physik«. Leipzig, 1877.

Κλαυδιου Πτολεμαιου Μαθηματικη Συνταξις. Dieses unter dem Namen Almagest bekannte Werk enthält die gesamte Astronomie der Griechen zu den Zeiten des Ptolemäus, der im Mittelalter mit Aristoteles gleiches Ansehen hatte. Der Name Almagest stammt aus dem Arabischen. Die erste lateinische Übersetzung erschien 1515 zu Venedig. Das griechische Original mit dem Kommentar von Theon 1538 zu Basel. Eine prächtige Ausgabe (mit Anmerkungen

---

von Delambre) griechisch und französisch ist die von M. Halma, Paris, der erste Band erschien 1813, der zweite 1816. Eine kritische Ausgabe der noch vorhandenen Werke des Ptolemäus bringt die Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana. Erschienen ist von Vol. I, Pars I (1898) und Pars II (1903), besorgt von J. L. Heiberg, enthaltend die ganze Syntaxis. Pars III wird die Prolegomena und die kleineren astronomischen Schriften des Ptolemäus enthalten.

Gute und übersichtliche Darstellungen des Almagest sind enthalten in:

1) Riccioli, G. B., Almagestum novum 2 vol. Bononiae 1651; brauchbar für die gesamte Literatur.
2) Tacquet, A., Astronomia, in dessen Opera mathematica nach seinem Tode in Antwerpen 1869 (und 1707) herausgegeben.
3) Delambre, M., Histoire de l'Astronomie ancienne, tome second, Paris, 1817.

Das erste Kompendium zum Almagest ist des Peurbach Theoricae novae planetarum, etc., Venet. 1488, von welchem zahlreiche Ausgaben existieren.

17) Copernicus, N., De revolutionibus orbium coelestium libri VI, Norimbergae 1543, Ausgabe sämtlicher Werke des Kopernikus von Baranowsky (mit polnischer Übersetzung), Warschau, 1854. Eine neue Ausgabe De revolutionibus orbium caelestium libri VI und der Narratio prima von Rheticus hat 1873 die Thorner Kopernikus-Gesellschaft veranstaltet. Kurze Darstellungen dieses Systems sind in Rhaeticus, G. J., Narratio de libris revolutionum Copernici auch der Basler Ausgabe des Kopernikus (1566) und dem Keplerschen Prodromus beigefügt. In letzterem Werke befindet sich auch die Schrift Maestlins: De dimensionibus orbium et sphaerarum coelestium juxta tabulas prutenicas ex sententia Nicolai Copernici, welche eine recht übersichtliche Darstellung dieses Systems enthält.

18) Über Kopernikus, Tycho und Kepler vergl.: Delambre, Histoire de l'Astronomie moderne, tome premier, Paris, 1821. Apelt, E. F., 1) Die Reformation der Sternkunde, Jena, 1852, und 2) »Die Epochen der Geschichte der Menschheit. Erster Band, zweite Ausgabe, Jena, 1851, Band 1«, für die Entdeckungsgeschichte des ersten Gesetzes, 3) »J. Keplers astronomische Welt-

---

ansicht, Leipzig, 1849«. Enthält eine ausführliche Darstellung der Harmonices mundi. 4) Göbel, Über Keplers astronomische Anschauungen und Forschungen, Halle, 1871. Zusammenstellung der wichtigsten, auf die Entdeckungsgeschichte bezüglichen Stellen aus Keplers Werken, mit Erläuterungen und verbindendem Texte. 5) Reuschle, Kepler und die Astronomie, Frankfurt, 1871. Übersichtliche Darstellung der Leistungen Keplers, seine Beziehungen zu den Vorgängern und Nachfolgern. Eine vorzügliche, namentlich für Kulturhistoriker sehr interessante Schrift. 6) Günther, Kepler. Galilei. Berlin, 1896. Deren Leben und Wirken, auf Grundlage eines reichen Materials.

19) Reinhold, E., Prutenicae tabulae coelestium motuum, Vitebergae, 1551. Diese Tafeln waren dem Herzog Albrecht von Preußen gewidmet, von welcher Widmung sie den Namen tragen.

20) Kepler, J., Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium coelestium: deque causis coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis et propriis, demonstratum per quinque regularia corpora geometrica ... a M. Joanne Keplero, Tübingae, 1596; zum zweiten Male mit Keplers Anmerkungen 1621 in Frankfurt herausgegeben. Dieses Werk enthält die leitende Idee zu den astronomischen Bestrebungen Keplers.

21) Tycho Brahe, Astronomiae instauratae progymnasmata. De mundi aetherei recentioribus phaenomenis liber secundus. Begonnen 1588 (auf der Uranienburg), beendet 1603 (in Prag). Astronomiae instauratae Mechanica, 1598. Die tychonische Astronomie ist auch enthalten in Longomontanus, Chr. S., Astronomia Danica, Amsterodami 1622, und Riccioli, Almagestum novum.

22) Astronomia nova ... a Joanne Keplero. Dieses für die theoretische Astronomie so wichtige Werk ist in fünf Teile abgeteilt. Der erste Teil ist rein theoretischer Natur und behandelt die Hilfsmittel der Darstellung der Ungleichheiten durch den exzentrischen Kreis und Epicykel; der Hauptinhalt dieses Teiles wurde in Art. 56, S. 136 und am Schlusse des Art. 47, S. 115 benutzt. Der zweite Teil enthält die Materien der Art. 51 und 52. Der dritte Teil enthält die Bestimmung der Erdbahn, das zweite Gesetz und die Bestimmnng der Mittelpunktsgleichung des Art. 55. Der vierte Teil enthält das erste Gesetz; der fünfte Teil beweist unter anderen den wichtigen Satz, daß die Knotenlinie der Marsbahn genau durch den wahren Sonnenort geht.

Dritter Abschnitt.

Zum Problem der Bahnbestimmung.

23) Tabulae Rudolphinae, Ulmae, 1627.
24) Harmonices mundi libri V, Lincii, 1619.
25) Bohnenberger, J. G. F., Astronomie, Tübingen, 1811.
26) Gauß, Vorwort zur Theoria motus.
27) Olbers, Abhandlung. Erster und zweiter Abschnitt.
28) J. Willard Gibbs, On the determination of elliptic orbits from three complete observations. National Academy of sciences. Vol. IV. Eighth memoir.

Art.

---

ansicht, Leipzig.
mundi. 4) Göb
Halle, 1871. Zus
bezüglichen Stel
Texte. 5) Reus
liche Darstellun
und Nachfolgern.
essante Schrift.
Wirken, auf Gr
19) Reinhold, E.,
Tafeln waren d
Widmung sie de
20) Kepler, J., Pro
cosmographicum
coelorum numeri
demonstratum
Keplero, Tübi
in Frankfurt he
astronomischen
21) Tycho Brahe,
recentioribus ph
burg), beendet 1
tychonische Ast
Astronomia Dan
22) Astronomia nov
nomie so wicht
theoretischer Na
heiten durch de
Teiles wurde in
zweite Teil ent
die Bestimmung
Mittelpunktsglei
der fünfte Teil
linie der Marsba

gefund
Beri
Sonne, s
Frischa

Erster Teil.

Beziehungen zwischen den die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmenden Größen.

Erster Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes in der Bahn.

1.

Betrachtet man die Planeten als mathematische Punkte und berücksichtigt man bloß die Anziehung der Sonne, so geschieht die Bewegung derselben nach folgenden Gesetzen:

I. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem (gemeinsamen) Brennpunkte sich der Mittelpunkt der Sonne befindet.

II. Die von der Sonne nach dem Planeten gezogene Gerade überstreicht der Zeit proportionale Flächen.

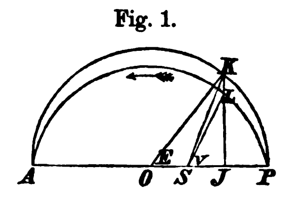
III. Die Würfel der großen Achsen zweier Planeten verhalten sich wie die Quadrate ihrer Umlaufszeiten.

Diese Gesetze sind von Kepler (geb. 1571, gest. 1630) gefunden worden.

Berücksichtigt man die Anziehung des Planeten auf die Sonne, so ist der Würfel der großen Achse dem Produkte

aus dem Quadrate der Umlaufszeit mit der Summe der Massen der Sonne und des Planeten proportional.

Fig. 1.



Es stelle die Ellipse der Figur (Fig. 1) die Bahn eines Planeten vor, im Brennpunkte S sei die Sonne. Ist AP die große Achse der Ellipse, so ist der dem Brennpunkte S näher liegende Punkt P zugleich derjenige Punkt der Bahn, in welchem der Planet der Sonne am nächsten kommt; der Punkt P wird daher das Perihelium oder die Sonnennähe genannt. Im anderen Endpunkte A ist der Planet von der Sonne am weitesten entfernt, der Punkt A wird daher das Aphelium oder die Sonnenferne genannt. Beide Punkte heißt man Apsiden, und die Gerade AP, sobald nur ihre Lage berücksichtigt wird, die Apsidenlinie.

Ist O der Mittelpunkt der Ellipse, $AO = OP = a$ die halbe große Achse, $OS = ae$, so heißt e die Exzentrizität. Die kleinste Entfernung des Planeten von der Sonne ist daher $SP = OP - OS = a(1 - e)$, die größte $SA = OA + SO = a(1 + e)$, daher die mittlere $= a =$ der halben großen Achse. In der mittleren Entfernung befindet sich der Planet, wenn er durch den einen oder den anderen Endpunkt der kleinen Achse geht.

Befindet sich der Planet im Punkte L seiner Bahn, so heißt die Gerade $SL = r$ der Radius Vektor, und der Winkel $PSL = v$ die wahre Anomalie des Planeten. Dieser Winkel wird vom Perihelium im Sinne der Bewegung des Planeten (in der Figur durch einen beigesetzten Pfeil ausgedrückt) von 0 bis 360° gezählt. Die beiden Größen r und v sind die Polarkoordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne als Anfangspunkt (Pol) und die Apsidenlinie als Grundlinie (Achse).

2.

Aus der wahren Anomalie v die Zeit t, in welcher sie vom Planeten beschrieben wird, zu finden.

Ist U die Umlaufszeit des Planeten, so verhält sich t zu U wie der Sektor PSL zur Fläche der ganzen Ellipse. Um das letztere Verhältnis zu berechnen, bedient man sich des sogenanten exzentrischen Kreises, der in der Ebene der Ellipse über der großen Achse AP als Durchmesser beschrieben wird. Eine vom Punkte L auf die Gerade AP gefällte Senkrechte LJ treffe den Kreis in K. Der Winkel POK heißt die exzentrische Anomalie und wird mit E bezeichnet.

Nun ist $SJ = OJ - OS$, d. h.

(1) $$r \cos v = a \cos E - ae.$$

Aus der Polargleichung der Ellipse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$$

folgt, wenn man den Wert von $r \cos v$ aus (1) in diese Gleichung setzt,

(2) $$r = a - ae \cos E.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man durch Addition und Subtraktion

$$r(1+\cos v) = a(1-e)(1+\cos E)$$
$$r(1-\cos v) = a(1+e)(1-\cos E).$$

Zieht man aus diesen Gleichungen die Quadratwurzel aus, so erhält man

(3) $$\sqrt{r} \cos \tfrac{1}{2} v = \sqrt{a(1-e)} \cos \tfrac{1}{2} E$$

(4) $$\sqrt{r} \sin \tfrac{1}{2} v = \sqrt{a(1+e)} \sin \tfrac{1}{2} E.$$

Durch Division und Multiplikation erhält man

(5) $$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E$$

(6) $$r \sin v = a\sqrt{1-e^2} \sin E.$$

Aus der Gleichung (6) folgt

$$r \sin v : a \sin E \text{ d. i. } LJ : KJ = \sqrt{1 - e^2} : 1$$

d. h. die Ordinate in der Ellipse verhält sich zur Ordinate des exzentrischen Kreises wie die kleine Halbachse $b = a\sqrt{1 - e^2}$ zur großen a. Zieht man eine zweite (unendlich nahe) Ordinate, so findet dasselbe Verhältnis zwischen den dadurch bestimmten Trapezen statt, mithin erhält man, wenn die ganzen Flächen in Trapeze zerlegt werden,

$$PJL : PJK = b : a = G : \pi a^2,$$

wo G die Fläche der Ellipse bedeutet. Ebenso ist, wenn S einen beliebigen Punkt der Geraden AP bedeutet, das Verhältnis der Dreiecke

$$SJL : SJK = b : a,$$

mithin das Verhältnis der Sektoren

$$SPL : SPK = G : \pi a^2;$$

daraus folgt

$$U : t = G : SPL = \pi a^2 : SPK.$$

Es ist aber $\quad SPK = OPK - OSK$

$$= \tfrac{1}{2} OP \cdot PK - \tfrac{1}{2} OS \cdot JK = \tfrac{1}{2} a \cdot aE - \tfrac{1}{2} ae \cdot a \sin E,$$

also $\quad U : t = 2\pi : E - e \sin E;$

setzt man ferner $\quad \frac{2\pi}{U} = \mu$, so wird

$$\mu t = E - e \sin E. \tag{7}$$

Die Größe $\mu t = M$ heißt die mittlere Anomalie, die Größe μ ist die mittlere Bewegung in der Zeiteinheit.

Aus v erhält man nach (5) die exzentrische Anomalie E und damit nach (7) die mittlere Anomalie M oder die Zeit t.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, daß

für $t = 0$, $M = E = v = 0$ ist.

» $t = \frac{1}{2} U$, $M = E = v = 180^\circ$ »

» $0 < t < \frac{1}{2} U$, $M < E < v$ »

» $U > t > \frac{1}{2} U$, $M > E > v$ »

In der Gleichung (7) ist der Hilfswinkel E in Teilen des Halbmessers auszudrücken, drückt man jedoch $\frac{2\pi}{U}$ und $e \sin E$ im Gradmaße aus, so kann auch E in Graden beibehalten werden. [1])

Aus dem Verhältnisse der Fläche der Ellipse zur Fläche des Kreises $= \sqrt{1-e^2} : 1$ folgt

$$G = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}.$$

Der Ausdruck $\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} : U$ stellt die in der Zeiteinheit vom Radius Vektor beschriebene Fläche, d. i. die Flächengeschwindigkeit, dar.

Sind m, m' die Massen zweier Planeten, die Masse der Sonne $= 1$ gesetzt, a, a' ihre mittleren Entfernungen, U, U' ihre Umlaufszeiten, so ist nach dem verbesserten dritten Keplerschen Gesetze

$$a^3 : a'^3 = U^2 (1+m) : U'^2 (1+m'),$$

es ist daher $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{U\sqrt{1+m}}$, also auch $\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{U\sqrt{1+m}}$ für alle Planeten konstant. [2]) Bezeichnet man mit k den Wert dieser Konstante, so wird die Flächengeshwindigkeit $= \frac{k}{2}\sqrt{1+m}\sqrt{p}$, die mittlere Bewegung $\mu = k\sqrt{1+m} : a^{\frac{3}{2}}$.

Die Größe k heißt die Konstante der *theoria motus*, Gauß bestimmt deren Wert aus der Bewegung der Erde. Als Einheit der Distanzen wird die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, als Zeiteinheit der mittlere Sonnentag angenommen. Mit den Werten

$$U = 365.2563835, \quad m = \frac{1}{354710} = 0.0000028192$$

erhält man

$$\log k = 8.2355814414$$
$$k = 0.01720209895. \text{ [3])}$$

3.

Die umgekehrte, unter dem Namen des Keplerschen Problems berühmte Aufgabe, nämlich »aus der mittleren Anomalie die wahre und den Radius Vektor zu finden«, kommt in der Anwendung weit häufiger vor.

Zunächst ist die Gleichung $E = M + e \sin E$ nach E aufzulösen. Die Auflösung kann entweder durch Reihen oder indirekt durch Versuche bewerkstelligt werden. Man beginnt mit einem Näherungswert E_0 und rechnet nun

$$E_1 = M + e \sin E_0$$
$$E_2 = M + e \sin E_1$$
$$E_3 = M + e \sin E_2$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

so lange, bis man keine verschiedenen Werte von E erhält; als E_0 kann man, wenn kein anderer Näherungswert bckannt ist, M annehmen. Aus zwei Näherungswerten kann man durch die *regula falsi* einen genaueren Wert erhalten.[4])

Beispiel. Es sei $M = 332^\circ\, 28'\, 32''.11$, $e = 0.2451028$, daher $\log e$ in Sekunden $= 4.7037734$.

Setzt man $E_0 = 332^\circ$, so erhält man

$E_1 = 325^\circ\, 53'$, $E_2 = 324^\circ\, 36'$
$E_3 = 324^\circ\, 22'\, 26''$, $E_4 = 324^\circ\, 17'\, 42''$
$E_5 = 324^\circ\, 16'\, 47''$, $E_6 = 324^\circ\, 16'\, 36''$ u. s. w.

bis man schließlich $E = 324^\circ\, 16'\, 33''.30$ erhält.

Nimmt man die *regula falsi* zu Hilfe, so erhält man aus $a = 325^\circ\, 53'$ $\alpha = 324^\circ\, 36'$. Setzt man ferner $a' = 324^\circ$, so wird $\alpha' = 324^\circ\, 13'.5$;

aus welchen Werten man nach [4]) erhält

$$w = 324^\circ\, 13'.5 + 3'.3 = 324^\circ\, 16'.8,$$

welcher Wert, wie man ersieht, dem wahren Werte von E schon ziemlich nahe kommt. Mittelst Tafeln (Bauschinger, Tafel X—XIV) wird diese Rechnung sehr gekürzt.

Ist nun $\log a = 0.4223802$, so erhält man nach (2) und (5) des Art. 2.

$$\log r = 0.3260215, \quad v = 315^\circ\, 2'\, 0''.76.$$

Ebenso kann man aus den Gleichungen (1) und (6) oder (3) und (4) des Art. 2. die Größen r und v erhalten.

4.

Die Kometen bewegen sich in Bahnen, die man in erster Annäherung als Parabeln betrachten kann. Der am Schlusse von Art. 2. gefundene Ausdruck für die Flächengeschwindigkeit gestattet eine Anwendung des zweiten und dritten Keplerschen Gesetzes auf die Bewegung eines Himmelskörpers in einer Parabel.

Ist der Bogen PL ein Stück einer Parabel, so ist das Flächenstück JPL der Parabel $= \frac{2}{3} JP \cdot JL$.

Die Polargleichung der Parabel ist

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2} v^2}.$$

Die in der Zeit t vom Radius Vektor durchstrichene Fläche SPL

$$= \frac{k}{2} \sqrt{1 + m}\, \sqrt{p}\, t = \text{Dreieck } SJL + \tfrac{2}{3} JPL.$$

$$= \tfrac{1}{2} SJ \cdot LJ + \tfrac{2}{3} JP \cdot JL.$$

Nun ist

$$JL = r \sin v = p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v, \quad SJ = r \cos v = \frac{p}{2} (1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^2),$$

$$JP = SP - SJ = \frac{p}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^2.$$

Setzt man $\frac{p}{2} = q$, so ist q die kleinste Entfernung des Kometen von der Sonne, und es wird

$$(8) \qquad \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{2}\, q^{\frac{3}{2}}}\, t = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^3.$$

Für die Kometen setzt man immer $m = 0$.

Multipliziert man die Gleichung (8) mit 75 und setzt

$$\frac{75\,k}{\sqrt{2}} = C, \ \log C = 9.9601277182,$$

so geht die Gleichung (8) über in

$$(8^*) \qquad \frac{Ct}{q^{\frac{3}{2}}} = 75 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v + 25 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^3.$$

Die Größe $\frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} = \mu$ heißt mittlere tägliche Bewegung, die Größe $\frac{C}{q^{\frac{3}{2}}}\, t = M$ mittlere Anomalie des Kometen. Aus t erhält man v und umgekehrt aus v die Zeit t. Die Barkersche Tafel (Bauschinger, Tafel XV und XVI) gibt für den Wert von v, welchen man für die Parabel in der Regel von 0 bis $\pm 180^\circ$ zählt, die Größe M und umgekehrt.

Beispiel. Für $\log q = 0.08469$ erhält man

$$\log \mu = 9.83309.$$

Ist nun, wenn die Perihelzeit $T =$ Mai 19.5175 ist, für April 14.54694 desselben Jahres die wahre Anomalie zu berechnen, so ist $t = -34.97056$ Tage, und man erhält

$$\log M = n\, 1.37680$$

und damit aus der Barkerschen Tafel

$$v = -34^\circ\, 12'\, 52'' = 325^\circ\, 47'\, 8''.$$

Aus v erhält man $\log r = 0.12400$.

Zweiter Abschnitt.

Beziehungen zwischen mehreren Orten in der Bahn.

5.

Hilfssätze: Bedeuten A, B, C drei beliebige Winkel, so ist
I. $\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0$,
II. $\cos A \sin(B-C) + \cos B \sin(C-A) + \cos C \sin(A-B) = 0$,
wie man durch Entwicklung von $\sin(B-C)\ldots$ unmittelbar findet.

6.

Es seien r, v; r', v' die Polarkoordinaten zweier Orte eines Himmelskörpers in der Bahn, t die Zeit, welche derselbe braucht, um vom ersten Ort zum zweiten zu gelangen; aus $r, r', v'-v, t$ die Elemente des Planeten in der Bahn zu bestimmen.

I. Für die Ellipse.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\sqrt{r}\ \sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)}\ \sin\tfrac{1}{2}E\\ \sqrt{r}\ \cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)}\ \cos\tfrac{1}{2}E\\ \sqrt{r'}\ \sin\tfrac{1}{2}v' &= \sqrt{a(1+e)}\ \sin\tfrac{1}{2}E'\\ \sqrt{r'}\ \cos\tfrac{1}{2}v' &= \sqrt{a(1-e)}\ \cos\tfrac{1}{2}E'\end{aligned}$$

folgt

$$(1)\begin{cases}\sqrt{rr'}\ \sin\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}v' = a\sqrt{1-e^2}\ \sin\tfrac{1}{2}E\cos\tfrac{1}{2}E'\\ \sqrt{rr'}\ \cos\tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}v' = a\sqrt{1-e^2}\ \cos\tfrac{1}{2}E\sin\tfrac{1}{2}E'\\ \sqrt{rr'}\ \sin\tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}v' = a(1+e)\sin\tfrac{1}{2}E\sin\tfrac{1}{2}E'\\ \sqrt{rr'}\ \cos\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}v' = a(1-e)\cos\tfrac{1}{2}E\cos\tfrac{1}{2}E'.\end{cases}$$

Setzt man Kürze halber $v'-v=2f$, $E'-E=2g$, $E'+E=2G$, so erhält man aus den Gleichungen (1) durch Subtraktion der beiden ersteren und Addition der beiden letzteren

(2) $$\sqrt{rr'}\ \sin f = a\sqrt{1-e^2}\ \sin g$$

(3) $$\sqrt{rr'}\ \cos f = a\cos g - ae\cos G.$$

Aus $r = a - ae\cos E$, $r' = a - ae\cos E'$ folgt

$$r' + r = 2a - 2ae\cos g\cos G = 2a\sin g^2 + 2\cos f\cos g\sqrt{rr'},$$

indem statt $ae\cos G$ aus (3) der Wert $a\cos g - \sqrt{rr'}\cos f$ gesetzt wird; woraus dann

$$a = \frac{r + r' - 2\cos f\cos g\sqrt{rr'}}{2\sin g^2},$$

oder $$a = \frac{r + r' - 2\cos f\sqrt{rr'} + 4\cos f\sin\tfrac{1}{2}g^2\sqrt{rr'}}{2\sin g^2}.$$

Setzt man, wenn $\cos f$ positiv ist,

$$r + r' - 2\cos f\sqrt{rr'} = 4\cos f\sqrt{rr'}\,l,$$

oder

(4) $$l = \frac{r + r'}{4\cos f\sqrt{rr'}} - \tfrac{1}{2},$$

so wird

(5) $$a = \frac{2(l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

und $\sqrt{a} = \pm\dfrac{\sqrt{2(l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}}{\sin g}$, wo das obere oder untere Zeichen stattfindet, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Ist aber $\cos f$ negativ, so setze man

$$r + r' - 2\cos f\sqrt{rr'} = -4\cos f\sqrt{rr'}\,L$$

oder

(4*) $$L = \frac{r + r'}{-4\cos f\sqrt{rr'}} + \tfrac{1}{2}$$

und es wird

(5*) $$a = \frac{-2(L - \sin\tfrac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}{\sin g^2}.$$

Sind τ, τ' die Zeiten, welche seit dem Durchgange durch das Perihel verflossen sind, also $\tau' - \tau = t$; so ist, die Masse des Planeten gleich Null gesetzt,

$$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\tau = E - e\sin E,\quad \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\tau' = E' - e\sin E',\ \text{also}$$

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = E' - E - e(\sin E' - \sin E)$$

$$= 2g - 2e\sin g\cos G.$$

Setzt man statt $e\cos G$ den Wert aus (3), so wird

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + 2\cos f\sin g\,\frac{\sqrt{rr'}}{(a)}.$$

Substituiert man für $\sqrt{a}$ den Wert, und setzt der Kürze wegen

(6) $$\frac{kt}{2^{\frac{3}{2}}\cos f^{\frac{3}{2}}(rr')^{\frac{3}{4}}} = m,$$

so wird

(7) $$\pm m = (l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}\right),$$

wo für m das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Ist $\cos f$ negativ, so setze man

(6*) $$\frac{kt}{2^{\frac{3}{2}}(-\cos f)^{\frac{3}{2}}(rr')^{\frac{3}{4}}} = M,$$

und man erhält

(7*) $$\pm M = -(L - \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (L - \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}\right),$$

wo das obere Zeichen gilt für $\sin g$ positiv, das untere für $\sin g$ negativ. —

Zuerst ist die Gleichung (7) oder (7*) nach g aufzulösen.

Es sei zunächst g nicht sehr groß*), in diesem Falle kann $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ in eine Reihe nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}g^2$ entwickelt werden.

Es ist

$$2g = 4\cdot\tfrac{1}{2}g,\ \sin g = 2\sin\tfrac{1}{2}g\cos\tfrac{1}{2}g = 2\sin\tfrac{1}{2}g\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}g^2},$$

$$\sin 2g = 2\sin g\cos g = 4\sin\tfrac{1}{2}g\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}g^2} - 8\sin\tfrac{1}{2}g^3\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}g^2}.$$

*) Bis 30° ungefähr.

Berücksichtigt man, dass

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 - \cdots$$

$$u = \sin u + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}\sin u^3 + \tfrac{1}{5}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin u^5 + \tfrac{1}{7}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sin u^7 + \tfrac{1}{9}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\sin u^9 + \cdots$$

ist, so erhält man

$$2g = 4\sin\tfrac{1}{2}g + \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}g^3 + \tfrac{3}{10}\sin\tfrac{1}{2}g^5 + \tfrac{5}{28}\sin\tfrac{1}{2}g^7 + \tfrac{35}{288}\sin\tfrac{1}{2}g^9 + \cdots$$

$$\sin 2g = 4\sin\tfrac{1}{2}g - 10\sin\tfrac{1}{2}g^3 + \tfrac{7}{2}\sin\tfrac{1}{2}g^5 + \tfrac{3}{4}\sin\tfrac{1}{2}g^7 + \tfrac{11}{32}\sin\tfrac{1}{2}g^9 + \cdots$$

$$2g - \sin 2g = \tfrac{32}{3}\sin\tfrac{1}{2}g^3 - \tfrac{16}{5}\sin\tfrac{1}{2}g^5 - \tfrac{4}{7}\sin\tfrac{1}{2}g^7 - \tfrac{2}{9}\sin\tfrac{1}{2}g^9 - \cdots$$

$$\sin g^3 = 8\sin\tfrac{1}{2}g^3 - 12\sin\tfrac{1}{2}g^5 + 3\sin\tfrac{1}{2}g^7 + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}g^9 + \cdots$$

Bezeichnet man der Kürze halber $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ mit X und setzt $\sin\frac{1}{2}g^2 = x$, so wird

$$X = \frac{\tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{5}x - \tfrac{1}{14}x^2 - \tfrac{1}{36}x^3 - \cdots}{1 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \cdots}$$

Bezeichnet man den Zähler von X mit Z, den Nenner mit N, so wird $\qquad X = \frac{Z}{N} = \frac{1}{N:Z}.$

Entwickelt man $N:Z$ in eine Reihe nach Potenzen von x, so erhält man

$$N:Z = \tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}x + \tfrac{9}{175}x^2 + \tfrac{26}{875}x^3 + \cdots$$

$$= \tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}(x - \xi);$$

wenn $\qquad \xi = \tfrac{2}{35}x^2 + \tfrac{52}{1575}x^3 + \cdots$ oder

$$\alpha)\quad \xi = [8.75696]x^2 + [8.5187]x^3 + \cdots,$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind, gesetzt wird. Es wird daher

$$X = \frac{1}{\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}(x - \xi)}.$$

Setzt man diesen Ausdruck von X in die Gleichung (7) und bedenkt man, daß, wenn g nicht groß ist, nur das obere Zeichen stattfindet; so erhält man

$$m = (l + x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(l + x)^{\frac{3}{2}}}{\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}(x - \xi)}.$$

Setzt man $\quad \frac{m}{(l + x)^{\frac{1}{2}}} = y$, so wird $x = \frac{m^2}{y^2} - l$,

$$\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}(x - \xi = \tfrac{9}{10}\left(\tfrac{5}{6} + l + \xi - \frac{m^2}{y^2}\right),$$

also

$$y = 1 + \frac{\tfrac{10}{9}\, m^2}{y^2\left(\tfrac{5}{6} + l + \xi - \frac{m^2}{y^2}\right)}$$

$$= 1 + \frac{\tfrac{10}{9}\, m^2}{(\tfrac{5}{6} + l + \xi)\left(y^2 - \frac{m^2}{\tfrac{5}{6} + l + \xi}\right)}$$

oder

$$y = 1 + \frac{\tfrac{10}{9} h}{y^2 - h}, \text{ wo}$$

$$\beta) \quad h = \frac{m^2}{\tfrac{5}{6} + l + \xi}$$

gesetzt wird.

Die Gleichung für y entwickelt, gibt

$$\gamma) \quad y^3 - y^2 - hy - \tfrac{1}{9} h = 0.$$

Diese Gleichung hat eine positive Wurzel.[5])

Die Auflösung der Gleichung (7) geschieht nun auf folgende Art: Für die erste Annäherung setze man $\xi = 0$, erhält damit nach β) $h = \frac{m^2}{\tfrac{5}{6} + l}$ und damit nach γ) y, aus y rechne man x. Dann rechne man nach α) ξ, und erhält damit aus β) einen verbesserten Wert von h. Diese Rechnung wird so oft wiederholt, bis man keine verschiedenen Werte erhält. Die Bauschinger Tafel XIX gibt für das Argument h $\log y^2$, Tafel XX für x ξ.

Aus der Gleichung $y = 1 + \frac{m^2}{y^2(\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}(x - \xi))}$ folgt, daß, wenn die Zeit t im Verhältnis zur Umlaufszeit als eine kleine Größe erster Ordnung betrachtet wird, $y - 1$ nahe $= \tfrac{4}{3} m^2$ eine kleine Größe zweiter Ordnung ist. Setzt man näherungsweise

$$y = 1 + \tfrac{4}{3} m^2 = 1 + \tfrac{1}{6} \frac{(kt)^2}{(rr')^{\frac{3}{2}} \cos f^3},$$

so beträgt der Fehler eine kleine Größe vierter Ordnung. Diese Ordnung wird nicht geändert, wenn $\cos f = 1$,

$rr' = r^2 = r'^2$ gesetzt wird, wenn die Exzentrizität e als kleine Größe erster Ordnung betrachtet werden kann, der Unterschied $r' - r$ daher als kleine Größe zweiter Ordnung. Es ist daher mit einem Fehler vierter Ordnung

$$y = 1 + \tfrac{1}{6}\frac{(k\,t)^2}{r^3} = 1 + \tfrac{1}{6}\frac{(k\,t)^2}{r'^3}.$$

Aus x erhält man g, ist g gefunden, so hat man nach Gleichung (5)

$$a = \frac{2\,(l+x)\cos f\sqrt{r\,r'}}{\sin g^2} = \frac{2\,m^2\cos f\sqrt{r\,r'}}{y^2\sin g^2} = \frac{k^2\,t^2}{4\,y^2\,r\,r'\cos f^2\sin g^2}.$$

Aus der Gleichung (2) d. h. aus

$$a\sqrt{1-e^2}\sin g = \sqrt{r\,r'}\sin f \text{ und } \sqrt{p} = \sqrt{a\,(1-e^2)} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}$$

folgt mit Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichung

(8) $$\sqrt{p} = \frac{y\,r\,r'\sin 2f}{k\,t},$$

mithin $y = k\sqrt{p}\,t : r\,r'\sin 2f$, d. h. y ist das Verhältnis des elliptischen Sektors zwischen den beiden Radien Vektoren und dem durch dieselben bestimmten Dreiecke.

Die Größen m, $(l+x)^{\frac{1}{2}}$, $(l+x)^{\frac{3}{2}}X$ sind daher beziehungsweise der Sektorfläche (zwischen den Radien Vektoren und dem elliptischen Bogen), der Dreiecksfläche (zwischen den Radien Vektoren und der Chorde), der Segmentfläche (zwischen dem Bogen und der Chorde) proportional.

Ist p gefunden, so erhält man aus den Gleichungen für r und r'

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1$$

$$e\cos v' = \frac{p}{r'} - 1.$$

Setzt man $v' = v + (v' - v) = v + 2f$ und entwickelt $\cos(v + 2f)$, so wird

$$(9)\qquad \begin{aligned} e \sin v &= \left(\frac{p}{r} - 1\right) \cot 2f - \left(\frac{p}{r'} - 1\right) \operatorname{cosec} 2f \\ e \cos v &= \frac{p}{r} - 1, \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen e und v und damit auch v' erhalten werden.

Die mittleren Anomalien M und M' erhält man aus

$$(10)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E' &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v' \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} M &= E - e \sin E \\ M' &= E' - e \sin E'. \end{aligned}$$

Die mittlere tägliche Bewegung μ wird erhalten aus

$$(12)\qquad \mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{M' - M}{t}.$$

Ist g groß, so läßt sich die Gleichung (7) oder (7*) sicher und leicht durch Versuche auflösen; sicher, weil $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ sich genau mittelst trigonometrischer Tafeln berechnen lässt; leicht, weil dieser Fall nur bei bereits näherungsweise bekannten Bahnen vorkommt, wo also ein Näherungswert von g schon gegeben ist. In diesem Falle bestimmt man dann aus (5) oder (5*) die Größe a, hierauf aus (2) die Größe $\sqrt{1-e^2}$ und aus beiden die Größe p; die übrige Rechnung ist genau so wie in dem früheren Falle.

Um l sicher und bequem zu berechnen, setze man $\sqrt[4]{\frac{r'}{r}} = \operatorname{tang}(45^\circ + w)$, und es wird dann

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}} &= 2 + [\operatorname{tang}(45^\circ + w) - \operatorname{cotang}(45^\circ + w)]^2 \\ &= 2 + 4 \operatorname{tang} 2w^2, \end{aligned}$$

woraus man erhält

$$l = \frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} + \frac{\operatorname{tang} 2 w^2}{\cos f},$$

und ebenso

$$L = -\frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} - \frac{\operatorname{tang} 2 w^2}{\cos f}.$$

Beispiel. Es sei $\log r = 0.3307925$, $\log r' = 0.3222617$, $v' - v = 7^\circ\, 34'\, 49''.87$, $t = 21.934433$ Tage.

Man erhält:

$w = -8'\, 26''.46$, $l = 0.0011202067$, $\log m^2 = 7.2735971$. Setzt man zunächst $\xi = 0$, so wird $h = 0.0022501$ und damit $\log y = 0.0010815$, woraus $x = 0.0007480399$ folgt. ξ ist in diesem Falle verschwindend. Aus x folgt

$g = 3^\circ\, 8'\, 4''.226$ und damit $\log a = 0.4223804$.

Aus (8) folgt $\log p = 0.3954732$ und damit aus (9) und (10)

$\log e = 9.3893483$, in Sekunden $\log e = 4.7037734$.

$v = 310^\circ\, 56'\, 9''.39$, $v' = 318^\circ\, 30'\, 59''.26$.

Statt der Exzentrizität e führt Gauß den spitzen Winkel φ ein, wo $\sin \varphi = e$ ist; aus p und φ erhält man a sehr bequem nach der Formel $a = p : \cos \varphi^2$.

Für dieses Beispiel ist

$\varphi = 14^\circ\, 11'\, 16''.47$ und daraus $\log a = 0.4223802$.

Die Übereinstimmung der beiden Werte von $\log a$ dient als Kontrolle der Rechnung; für den letzteren braucht man l nicht mit dieser Genauigkeit zu rechnen, welche der erste erfordert.

Aus den wahren Anomalien und der Exzentrizität erhält man

$$E = 320^\circ\, 52'\, 19''.16, \quad E' = 327^\circ\, 8'\, 27''.64$$
$$M = 329^\circ\, 44'\, 2''.84, \quad M' = 334^\circ\, 45'\, 38''.02.$$
$$M' - M = 18095''.18.$$

Aus $\log a$ erhält man die mittlere tägliche Bewegung $\mu = 824''.9663$, also in der Zeit t beträgt die mittlere

Bewegung 18095″.17. Die Übereinstimmung mit $M' - M$ dient als Kontrolle der Rechnung. [6])

II. Für die Parabel.

Aus $r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2}$, $r' = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v'^2}$ erhält man

$$\sqrt{\frac{1}{q}} \cos \tfrac{1}{2} v = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad \sqrt{\frac{1}{q}} \cos \tfrac{1}{2} v' = \frac{1}{\sqrt{r'}}$$

und daraus, indem man $v' = v + 2f$ setzt,

$$(13) \quad \begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{q}} \sin \tfrac{1}{2} v &= \frac{\cot f}{\sqrt{r}} - \frac{\operatorname{cosec} f}{\sqrt{r'}} \\ \sqrt{\frac{1}{q}} \cos \tfrac{1}{2} v &= \frac{1}{\sqrt{r}}, \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen q, v und v' erhalten werden. Aus

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} \tau &= 75 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v + 25 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^3 \\ \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} \tau' &= 75 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v' + 25 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v'^3 \end{aligned}$$

erhält man τ und τ', d. i. die Zeiten, welche seit dem Durchgange durch das Perihel verflossen sind; aus diesen und den Beobachtungszeiten erhält man die Zeit des Durchganges des Himmelskörpers durch das Perihel. Die Übereinstimmung dieser beiden Zeiten dient als Kontrolle der Rechnung.

Beispiel. Es sei $\log r = 0.13896$, $\log r' = 0.11068$, $v' - v = 12^\circ\, 11'\, 35''$, $t = -14.04929$ Tage.

Man erhält

$\log q = 0.08469$, $v = -40^\circ\, 5'\, 16''$, $v' = -27^\circ\, 53'\, 41''$.

Aus v erhält man $\tau = -41.968$ Tage.

- v' - - -27.918 -

7.

Für die Bestimmung einer parabolischen Bahn ist eine unter dem Namen der Lambert'schen Gleichung bekannte Formel von großer Wichtigkeit.

Nach den Gleichungen (14) ist, wegen $\tau' - \tau = t$,

$$\frac{Ct}{q^{\frac{3}{2}}} = 75\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,v' - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,v) + 25\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,v'^3 - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,v^3)$$

$$= 25\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v' - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v)\,(3 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v\;\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v' + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,v'^2).$$

Da $1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v' = \frac{\cos f}{\cos\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}v'}$, $1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}v^2}$, $1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v'^2 = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}v'^2}$, $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v' - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v = \frac{\sin f}{\cos\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}v'}$ ist; so folgt

$$\frac{Ct}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{25\sin f}{\cos\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}v'}\left(\frac{\cos f}{\cos\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}v'} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}v^2} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}v'^2}\right).$$

Setzt man für C den Werth $\frac{75k}{\sqrt{2}}$, ferner aus $r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2}$, $r' = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}v'^2}$ die Werthe $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}v} = \sqrt{\frac{r}{q}}$, $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}v'} = \sqrt{\frac{r'}{q}}$, so wird

$$(15)\qquad \frac{kt}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin f\sqrt{rr'}}{3\,q^2}\,(\cos f\sqrt{rr'} + r + r').$$

Bedeutet s die Sehne zwischen dem ersten und zweiten Orte, so ist

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos 2f = (r + r')^2 - 4rr'\cos f^2$$

$$4rr\cos f^2 = (r + r')^2 - s^2 = (r + r' + s)\,(r + r' - s).$$

Setzt man $r + r' + s = m^2$, $r + r' - s = n^2$, so wird

$$(16)\qquad \begin{aligned} r + r' &= \tfrac{1}{2}\,(m^2 + n^2) \\ 2\cos f\sqrt{rr'} &= \pm\, m\,n, \end{aligned}$$

wo das obere Zeichen stattfindet, wenn $\cos f$ positiv, das untere Zeichen, wenn $\cos f$ negativ ist.

Nun ist

$$\sin f^2 = \sin \tfrac{1}{2}(v' - v)^2 = (\sin \tfrac{1}{2} v' \cos \tfrac{1}{2} v - \cos \tfrac{1}{2} v' \sin \tfrac{1}{2} v)^2$$
$$= \cos \tfrac{1}{2} v^2 + \cos \tfrac{1}{2} v'^2 - 2 \cos \tfrac{1}{2}(v' - v) \cos \tfrac{1}{2} v \cos \tfrac{1}{2} v'$$
$$= \frac{q}{r} + \frac{q}{r'} - \frac{2 q \cos f}{\sqrt{rr'}} = q \frac{r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'}}{rr'},$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (16)

(17) $$2 \sin f \sqrt{rr'} = (m \mp n) \sqrt{2q}.$$

Substituirt man die Werte von $r + r'$, $\cos f \sqrt{rr'}$, $\sin f \sqrt{rr'}$ in die Gleichung (15), so erhält man

$$2kt = \tfrac{1}{3}(m^3 \mp n^3),$$

oder, indem man statt m und n die Werte setzt,

(18) $$6kt = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}},$$

welche Gleichung die Lambert'sche Formel heißt, wiewohl sie bereits von Euler angegeben wurde. Das obere Zeichen wird genommen, wenn $2f = v' - v$ kleiner als 180° ist, das untere, wenn $2f$ größer als 180° ist. In der Regel findet nur der erste Fall statt.

8.

Es seien r, v; r', v'; r'', v'' drei Orte eines Himmelskörpers in der Bahn, so ist

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$
$$\frac{p}{r'} = 1 + e \cos v'$$
$$\frac{p}{r''} = 1 + e \cos v''.$$

Multipliziert man diese Gleichungen resp. mit $\sin(v' - v'')$, $\sin(v'' - v)$, $\sin(v - v')$ und addiert man, so wird zufolge der Formel II. des Art. 5.

$$\frac{p}{r} \sin(v' - v'') + \frac{p}{r'} \sin(v'' - v) + \frac{p}{r''} \sin(v - v')$$
$$= \sin(v' - v'') + \sin(v'' - v) + \sin(v - v').$$

Multipliziert man mit $rr'r''$ und setzt Kürze halber

$$v'-v=2f'', \quad v''-v=2f', \quad v''-v'=2f,$$

$$rr'\sin 2f''=n'', \; rr''\sin 2f'=n', \; r'r''\sin 2f=n,$$

so wird

$$p=\frac{rn-r'n'+r''n''}{n-n'+n''}$$

$$=\frac{rr'r''(\sin 2f-\sin 2f'+\sin 2f'')}{n-n'+n''};$$

berücksichtigt man ferner, daß

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,(\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta))=4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}$$

ist, so wird

(19) $$p=\frac{4rr'r''\sin f\sin f'\sin f''}{n-n'+n''}.$$

In diesem Ausdrucke sind $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}n'$, $\frac{1}{2}n''$ die Flächen der Dreiecke resp. zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Radius Vektor; der Nenner ist daher die doppelte Dreiecksfläche, welche durch die drei Orte des Himmelskörpers im Raume bestimmt ist. Wegen

$$rn:r'n':r''n''=\sin 2f:\sin 2f':\sin 2f''$$

folgt: Sind die Winkel $2f$ und $2f''$ spitz ($2f'$ kann dann spitz oder stumpf sein), so können rn, $r'n'$, $r''n''$ als die drei Seiten eines Dreieckes betrachtet werden, deren gegenüberliegende Winkel $2f$, $180^\circ-2f'$, $2f''$ sind.

Aus dem obigen für p gefundenen Ausdrucke läßt sich eine Formel für $\frac{n+n''}{n'}$ ableiten, welche in der Folge von Wichtigkeit ist.

Sind nämlich t, t', t'' die Zwischenzeiten resp. zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Orte, und setzt man

$$kt=\vartheta, \quad kt'=\vartheta', \quad kt''=\vartheta'',$$

so ist zufolge Gleichung (8) des Art. 6.

$$\sqrt{p} = \frac{yn}{\vartheta}, \qquad \sqrt{p} = \frac{y''n''}{\vartheta''}, \text{ also}$$

$$p = \frac{yy''nn''}{\vartheta\vartheta''},$$

wo die Bedeutung von y und y'' klar ist. Durch Gleichstellung dieses Wertes von p mit dem in Gleichung (19) erhält man

$$n - n' + n'' = \frac{4rr'r'' \sin f \sin f' \sin f'' \vartheta\vartheta''}{yy''nn''}.$$

Da $nn'' = r'r'' \sin 2f \cdot rr' \sin 2f''$

$= 4rr'^2 r'' \sin f \cos f \sin f'' \cos f''$ ist, so wird

$$n - n' + n'' = \frac{\sin f' \vartheta\vartheta''}{yy'' r' \cos f \cos f''} = \frac{n' \vartheta\vartheta''}{2yy'' rr'r'' \cos f \cos f' \cos f''},$$

$$(20) \qquad \frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2yy'' rr'r'' \cos f \cos f' \cos f''}. \text{ [7)]}$$

Dritter Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes im Raume.

9.

Um den Ort eines Himmelskörpers im Raume in Beziehung auf einen gegebenen Punkt angeben zu können, ist zuerst die Kenntnis der Lage der Bahnebene gegen eine bekannte Ebene und die der Apsidenlinie in der Bahnebene erforderlich. Denkt man sich um den Mittelpunkt der Sonne eine Kugelfläche beschrieben, so werden sich auf dieser die Bahn des Himmelskörpers als ein größter Kreis, die von dem Mittelpunkte der Sonne nach dem Himmelskörper gezogenen Geraden als Punkte darstellen. Wenn die zu bestimmenden Ebenen und Geraden nicht durch die Sonne selbst hindurchgehen, so sollen dieselben durch

parallel durch den Mittelpunkt der Sonne gelegte Ebenen und Gerade ersetzt werden.

Die Ebene der Bahn eines Himmelskörpers schneidet im allgemeinen die Ebene der Erdbahn oder Ekliptik, diese Durchschnittslinie heißt die Knotenlinie; die Durchschnittspunkte der erwähnten Kugelfläche mit der Knotenlinie heißen Knoten, derjenige, wo der Planet von der südlichen Gegend in die nördliche Gegend der Ekliptik übergeht, heißt der aufsteigende, der andere der absteigende Knoten, in diesem geht der Himmelskörper von der nördlichen Gegend der Ekliptik in die südliche über. Die Lage der Knoten wird durch ihren nach der Ordnung der Zeichen gezählten Abstand von dem Frühlings-Äquinoktium bezeichnet, d. i. die Länge des Knotens.

Es sei (Fig. 2) ♈☊E ein Teil der Ekliptik, $♈_0$☊P ein Teil der Bahn des Himmelskörpers, ♈ der Frühlingspunkt (die Richtung der Bewegung ist durch beigesetzte Pfeile bezeichnet). Der sphärische Winkel E☊P stellt den Winkel der Bahn und Ekliptik vor, dieser Winkel heißt die Neigung der Bahn des Himmelskörpers gegen die Ekliptik oder einfach die Neigung der Bahn; die Neigung wird von 0 bis 180° gezählt. Bezeichnet in der Figur ☊ den aufsteigenden Knoten, so stellt der Bogen ♈☊ die Länge des aufsteigenden Knotens dar. Wird dieser Bogen in der Bahn von ☊ aus entgegengesetzt der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers abgetragen, so erhält man dadurch den Punkt $♈_0$; die von diesem Punkt in der Richtung der Bewegung gezählten Bogen werden Längen in der Bahn genannt. Ist daher P das Perihel (eigentlich

Fig. 2.

die Projektion des Perihels), so heißt $\Upsilon_0 P$ die Länge des Perihels.

In Figur 2 ist daher

$$\Upsilon\Omega = \Omega = \text{Länge des aufsteigenden Knotens,}$$
$$\sphericalangle E\Omega P = i = \text{Neigung der Bahn,}$$
$$\Upsilon_0 P = \Pi = \text{Länge des Perihels.}$$

Ist L ein Ort des Himmelskörpers, v die wahre, M die mittlere Anomalie desselben, so heißt $\Pi + v$ die wahre, $\Pi + M$ die mittlere Länge des Himmelskörpers in der Bahn. Die sieben Größen: 1) mittlere Länge für einen bestimmten Zeitpunkt, 2) mittlere Entfernung, 3) Exzentrizität, 4) Länge des Perihels, 5) Länge des aufsteigenden Knotens, 6) Neigung der Bahn, 7) Masse des Himmelskörpers heißen die Elemente der Bewegung des Himmelskörpers. Bei der Parabel vertritt die Zeit des Perihel-durchganges die Stelle des ersten Elementes. Statt des Elementes in 2) wird die Distanz im Perihel genommen. Bei den Kometen und den kleinen Planeten setzt man die Masse immer gleich Null.

Die Lage eines Punktes, z. B. L, an der Oberfläche der Kugel wird am einfachsten durch den Abstand desselben von der Ekliptik, d. i. die Breite, und durch den Abstand des Fußpunktes des Perpendikels auf die Ekliptik von dem Frühlingspunkt, d. i. die Länge, bestimmt. Es sei also der Bogen LD senkrecht auf ΥE, so heißt $\Upsilon D = l$ die Länge, $DL = b$ die Breite des Punktes L. Die Breite wird von beiden Seiten der Ekliptik an bis 90° gezählt, oberhalb (d. i. in der nördlichen Region) der Ekliptik positiv, unterhalb negativ gezählt. Da der Mittelpunkt der Sonne als Mittelpunkt der Kugel angenommen wurde, so nennt man l und b heliozentrische Länge und Breite.

Bezeichnet man den Bogen ☊L mit u, so heißt u das **Argument der Breite**, dabei ist $u = \Pi - ☊ + v$.

Aus der obigen Zählweise folgt, daß für $i < 90^\circ$ die Größen $l - ☊$ und u, für $i > 90^\circ$ die Größen $l - ☊$ und $360^\circ - u$ in demselben Quadranten liegen.

10.

Die Lage eines Punktes im Raume wird entweder durch die Abstände desselben von drei sich einander unter rechten Winkeln schneidenden Ebenen, d. i. durch rechtwinklige Koordinaten oder durch den Abstand von einem gegebenen Anfangspunkt und durch zwei Winkel, d. i. durch Polarkoordinaten, bestimmt. Ist der Punkt O der Koordinatenanfang der Achsen OX, OY, OZ, ferner $MP \perp XY$, $PQ \perp OX$, so stellen die drei Strecken $OQ = x$, $PQ = y$, $MP = z$ die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes M dar. Der Punkt M kann auch bestimmt werden: 1) durch die (absolut genommene) Distanz $OM = r$, durch den Winkel $XOP = l$ gezählt von der positiven x-Achse an gegen die positive y-Achse von 0 bis 360° und durch den Winkel $MOP = b$ gezählt von 0 bis $\pm$ 90°, je nachdem der Punkt M auf der positiven oder negativen Seite der z-Achse liegt. 2) Durch die Distanz $OM = r$, durch den Winkel $XOM = u$ gezählt von 0 bis 360° und durch den Winkel $MQP = i$ der Ebene MOQ mit der Ebene XY gezählt von 0 bis 180°. Zwischen diesen Koordinaten findet folgender Zusammenhang statt:

Fig. 3.

1) Aus $MP = OM \sin b$, $OP = OM \cos b$, $OQ = OP \cos l$, $PQ = OP \sin l$ folgt

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= r \cos b \cos l \\ y &= r \cos b \sin l \\ z &= r \sin b. \end{aligned}$$

2) Aus $OQ = OM \cos u$, $MQ = OM \sin u$, $PQ = MQ \cos i$, $MP = MQ \sin i$ folgt

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= r \cos u \\ y &= r \sin u \cos i \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

Ist die Gerade OX die Linie nach dem aufsteigenden Knoten, die Ebene XY die Ekliptik, MOX die Ebene der Bahn des Himmelskörpers, so sind die Polarkoordinaten l und b (sowie u und i) mit den Größen $l - \Omega$ und b (sowie u und i) des vorigen Artikels identisch, man erhält daher durch Gleichstellung der beiden Systeme von x, y, z folgende Gleichungen

$$(3) \qquad \cos b \cos (l - \Omega) = \cos u$$

$$(4) \qquad \cos b \sin (l - \Omega) = \sin u \cos i$$

$$(5) \qquad \sin b = \sin u \sin i.$$

11.

Es sei der Mittelpunkt der Sonne der Koordinatenanfang, die Ekliptik die xy-Ebene, die positive x-Achse sei nach dem Frühlingspunkt, die positive y-Achse nach dem Punkt 90° Länge, die positive z-Achse nach dem Nordpol der Ekliptik gerichtet. Sind daher l, b, r die heliozentrische Länge, Breite und Distanz eines Punktes von der Sonne, x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten desselben auf das vorhin erwähnte Achsensystem bezogen, so drücken die Gleichungen (1) des vorigen Artikels unmittelbar den Zusammenhang der heliozentrischen rechtwinkligen und Polarkoordinaten aus.

Sind L, B, R die heliozentrische Länge, Breite und Distanz des Mittelpunktes der Erde von der Sonne, X, Y, Z die rechtwinkligen Koordinaten, so ist analog

$$X = R \cos B \cos L, \quad Y = R \cos B \sin L, \quad Z = R \sin B.$$

Denkt man sich durch den Mittelpunkt der Erde ein dem früheren Achsensystem paralleles Achsensystem gelegt, so sollen durch λ und β die geozentrische Länge und Breite, durch Δ die Distanz des Punktes von dem Mittelpunkte der Erde bezeichnet werden. Sind ξ, η, ζ die rechtwinkligen geozentrischen Koordinaten dieses Punktes, so ist

$$\begin{aligned} \xi &= \Delta \cos\beta \cos\lambda \\ \eta &= \Delta \cos\beta \sin\lambda \\ \zeta &= \Delta \sin\beta, \end{aligned} \tag{6}$$

und es ist

$$\begin{aligned} x &= X + \xi \\ y &= Y + \eta \\ z &= Z + \zeta. \end{aligned}$$

Die Größe $r \cos b$ ist die Projektion der Distanz des Punktes von der Sonne auf die Ekliptik und heißt kurtierte Distanz von der Sonne. Ebenso heißt $\Delta \cos\beta = \varrho$ die kurtierte Distanz des Punktes von der Erde.

Die Breite B der Erde ist nahe gleich Null und wird daher gewöhnlich vernachlässigt, unter dieser Voraussetzung erhält man für die heliozentrischen Koordinaten die Ausdrücke

$$\begin{aligned} r \cos b \cos l &= x = \varrho \cos\lambda + R \cos L \\ r \cos b \sin l &= y = \varrho \sin\lambda + R \sin L \\ r \sin b \quad &= z = \varrho \operatorname{tang}\beta. \end{aligned} \tag{7}$$

Vermittelst dieser Ausdrücke kann man die heliozentrischen Längen, Breiten und Distanzen in geozentrische verwandeln, und umgekehrt.

Aus $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ oder

$$r^2 = (\varrho \cos\lambda + R\cos L)^2 + (\varrho \sin\lambda + R \sin L)^2 + \varrho^2 \operatorname{tang}\beta^2,$$

folgt durch Entwicklung der Quadrate

$$r^2 = R^2 + 2R\cos(\lambda - L)\varrho + \sec\beta^2\varrho^2. \tag{8}$$

12.

Die heliozentrischen Koordinaten für das Achsensystem des vorigen Artikels lassen sich unmittelbar durch r und v ausdrücken. Setzt man in den Gleichungen (1) des Art. 10 $l = l - \Omega + \Omega$, so wird

$$x = r\cos b\cos(l - \Omega)\cos\Omega - r\cos b\sin(l - \Omega)\sin\Omega,$$
$$y = r\cos b\sin(l - \Omega)\cos\Omega + r\cos b\cos(l - \Omega)\sin\Omega,$$

und berücksichtigt man Gleichungen (3), (4), (5), so wird

$$x = r\cos u\cos\Omega - r\sin u\sin\Omega\cos i,$$
$$y = r\sin u\cos\Omega\cos i + r\cos u\sin\Omega,$$
$$z = r\sin u\sin i.$$

Setzt man

$$\cos\Omega = l\sin A$$
$$-\sin\Omega\cos i = l\cos A,$$
$$\sin\Omega = m\sin B$$
$$\cos\Omega\cos i = m\cos B,$$
$$\sin i = n,$$

wo l, m, n positiv genommen werden, so wird

$$\left.\begin{aligned} x &= lr\sin(A + u) \\ y &= mr\sin(B + u) \\ z &= nr\sin u. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Da $u = \Pi - \Omega + v$ ist, so sind x, y, z unmittelbar durch r und v ausgedrückt, wenn

$$\mathfrak{A} = \Pi - \Omega + A$$
$$\mathfrak{B} = \Pi - \Omega + B$$
$$\mathfrak{C} = \Pi - \Omega$$

gesetzt wird; es wird dann nämlich

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= lr \sin(\mathfrak{A} + v) \\ y &= mr \sin(\mathfrak{B} + v) \\ z &= nr \sin(\mathfrak{C} + v). \end{aligned}$$

Diese Formeln sind dann sehr bequem, wenn mehrere Orte zu rechnen sind.

Beispiel: Es sei

$$☊ = 171^\circ\, 7'\, 53''.84, \quad i = 13^\circ\, 6'\, 54''.20.$$

Man erhält

$$A = 261^\circ\, 21'\, 33''.86, \quad B = 170^\circ\, 53'\, 52''.92,$$

$$\log l = 9.9997341, \quad \log m = 9.9888016, \quad \log n = 9.3558483.$$

Ist nun $\Pi - ☊ = 241^\circ\, 9'\, 34''.06$, so wird

$$\mathfrak{A} = 142^\circ\, 31'\, 7''.92, \quad \mathfrak{B} = 52^\circ\, 3'\, 26''.98.$$

Hierbei dient die Gleichung (aus (10))

$$l^2 \sin \mathfrak{A}^2 + m^2 \sin \mathfrak{B}^2 + n^2 \sin \mathfrak{C}^2 = 1$$

als Kontrolle der Rechnung.

Für $v = 315^\circ\, 2'\, 0''.76$, $\log r = 0.3260215$ wird

$$\log x = 0.3219717, \quad \log y = 9.4063011, \quad \log z = 9.1272776.$$

Vierter Abschnitt.

Beziehungen zwischen mehreren Orten im Raume.

18.

Aus zwei heliozentrischen Orten l, b und l', b' im Raume, die Länge des aufsteigenden Knotens ☊, die Neigung der Bahn i und die Argumente der Breite u, u' zu bestimmen.

Aus den Gleichungen (4) und (5) des Art. 10 folgt durch Division

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} i \sin(l - ☊) \\ \operatorname{tang} b' &= \operatorname{tang} i \sin(l' - ☊). \end{aligned}$$

Setzt man $l' - \Omega = l - \Omega + l' - l$, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten Ω und i folgende Gleichungen

$$(1)\quad \begin{aligned} \operatorname{tang} i \sin(l - \Omega) &= \operatorname{tang} b \\ \operatorname{tang} i \cos(l - \Omega) &= \frac{\operatorname{tang} b' - \operatorname{tang} b \cos(l' - l)}{\sin(l' - l)}. \end{aligned}$$

Wachsen die heliozentrischen Längen mit der Zeit, so ist $i < 90^\circ$, im entgegengesetzten Falle ist $i > 90^\circ$.

Hat man Ω und i gefunden, so bestimmt man die Argumente der Breite nach den aus (3) und (4) des Art. 10 durch Division erhaltenen Formeln

$$(2)\quad \begin{aligned} \operatorname{tang} u &= \frac{\operatorname{tang}(l - \Omega)}{\cos i} \\ \operatorname{tang} u' &= \frac{\operatorname{tang}(l' - \Omega)}{\cos i}. \end{aligned}$$

Ist $i < 90^\circ$, so liegen $l - \Omega$ und u in demselben Quadranten.
» $i > 90^\circ$ » $360^\circ - u$ »

14.

Es seien x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' drei heliozentrische Orte eines Himmelskörpers im Raume, so ist nach (10) des Art. 12.

$$\frac{x}{r} = l \sin(\mathfrak{A} + v)$$

$$\frac{x'}{r'} = l \sin(\mathfrak{A} + v')$$

$$\frac{x''}{r''} = l \sin(\mathfrak{A} + v'').$$

Multipliziert man diese Gleichungen resp. mit $\sin(v' - v'')$, $\sin(v'' - v)$, $\sin(v - v')$ und addiert man, so erhält man mit Berücksichtigung der Formel I. des Art. 5.

$$\frac{x}{r} \sin(v' - v'') + \frac{x'}{r'} \sin(v'' - v) + \frac{x''}{r''} \sin(v - v') = 0$$

oder

$$x r' r'' \sin(v'' - v') - x' r r'' \sin(v'' - v) + x'' r r' \sin(v' - v) = 0.$$

Da $r' r'' \sin(v''-v') = n$, $r r'' \sin(v''-v) = n'$, $r r' \sin(v'-v) = n''$ gesetzt wurde, so wird

$$n x - n' x' + n'' x'' = 0, \text{ ebenso}$$
$$n y - n' y' + n'' y'' = 0$$
$$n z - n' z' + n'' z'' = 0.$$ [8])

Drückt man die heliozentrischen Koordinaten durch die geozentrischen aus, so wird gemäß der Ausdrücke (7) des Art. 11.

$$(3) \quad n(\varrho \cos\lambda + R\cos L) - n'(\varrho' \cos\lambda' + R'\cos L') + n''(\varrho'' \cos\lambda'' + R''\cos L'') = 0$$

$$(4) \quad n(\varrho \sin\lambda + R\sin L) - n'(\varrho' \sin\lambda' + R'\sin L') + n''(\varrho'' \sin\lambda'' + R''\sin L'') = 0$$

$$(5) \quad n\,\varrho \operatorname{tang}\beta - n'\,\varrho' \operatorname{tang}\beta' + n''\,\varrho'' \operatorname{tang}\beta'' = 0.$$

Zweiter Teil.

Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei geozentrischen Beobachtungen.

15.

Vernachlässigt man die Masse des Himmelskörpers, so sind bei einer elliptischen Bahn sechs Elemente zu bestimmen. Zu dieser Bestimmung müssen daher sechs von einander unabhängige Größen, welche von den Elementen abhängen, gegeben sein. Diese gegebenen Größen können nur von der Erde aus beobachtete Orte des Himmelskörpers sein, und da jede solche Ortsbestimmung zwei Daten, etwa Länge und Breite liefert, so sollen drei geozentrische Beobachtungen als gegeben betrachtet werden. Diese Beobachtungen dürfen keine zu große heliozentrische Bewegung umfassen, indem sonst Voraussetzungen, zu welchen man bei einer ersten Bahnbestimmung genöthigt ist, nicht stattfinden.

Wären für zwei Beobachtungen außer den geozentrischen Längen und Breiten noch die Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde gegeben, so könnte man daraus die heliozentrischen Längen, Breiten und Entfernungen des Himmelskörpers rechnen, und damit nach Art. 13. Neigung, Knoten und Argument der Breite, und dann nach Art. 6. die übrigen Elemente bestimmen. Wir versuchen

daher zunächst die Bestimmung der Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde.

Es bedeuten, wie früher

t, t', t'' die Zwischenzeiten zwischen resp. der zweiten und dritten, ersten und dritten, ersten und zweiten Beobachtung.

λ, λ', λ'', die drei geozentrischen Längen des Himmelskörpers,

β, β', β'' dessen Breiten,

ϱ, ϱ', ϱ'' dessen kurtierte Entfernungen von der Erde,

L, L', L'' die heliozentrischen Längen der Erde,

R, R', R'' die Entfernungen der Erde von der Sonne.

Aus den Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14. erhellt, daß wenn die Werte der Verhältnisse $n : n'$ und $n'' : n'$ bekannt wären, man unmittelbar die Größen ϱ, ϱ', ϱ'' finden könnte. Nun ist

$$\frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \cdot \frac{y'}{y}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \cdot \frac{y'}{y''}.$$

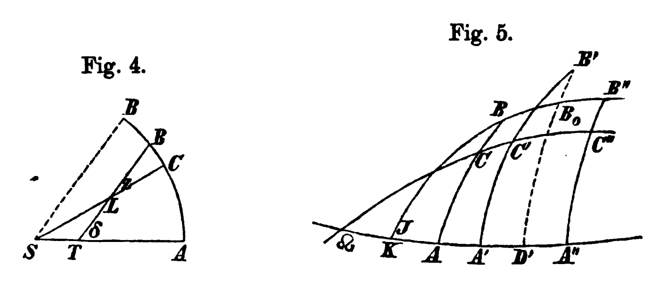
Die Verhältnisse y, y', y'' weichen von der Einheit um kleine Größen der zweiten Ordnung ab, wenn die Zwischenzeiten t und t'' als kleine Größen erster Ordnung betrachtet werden. Man könnte daher versuchen, in erster Annäherung für die Verhältnisse $n : n'$ und $n'' : n'$ die Verhältnisse $\vartheta : \vartheta'$ und $\vartheta'' : \vartheta'$ zu setzen. Diese Voraussetzung ist jedoch unstatthaft; denn eliminiert man aus den Gleichungen (3), (4), (5) die Größen ϱ und ϱ'', so erhält man

$$\begin{aligned}
& n\ R\ (\operatorname{tang}\beta \sin(\lambda'' - L) - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda - L)) \\
& - n'\ R'\ (\operatorname{tang}\beta \sin(\lambda'' - L') - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda - L')) \\
(1)\quad & + n''\ R''\ (\operatorname{tang}\beta \sin(\lambda'' - L'') - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda - L'')) \\
& - n'\ \varrho'\ (\operatorname{tang}\beta \sin(\lambda'' - \lambda') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - \lambda) \\
& \qquad + \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - \lambda)) = 0,
\end{aligned}$$

welche Gleichung zur Bestimmung von ϱ' dient.

Diese Gleichung läßt sich durch die Einführung von Hilfsgrößen auf folgende Art umformen:

Es stelle (Fig. 4) S den Mittelpunkt der Sonne, T den Mittelpunkt der Erde und L den Ort des Planeten dar, ferner seien (Fig. 5) A, A', A'' die drei heliozentrischen



Orte der Erde auf der Himmelskugel, B, B', B'' die drei geozentrischen Orte des Himmelskörpers, C, C', C'' die heliozentrischen Orte desselben. Ist K der Durchschnittspunkt des größten Kreises durch die äußersten geozentrischen Orte des Himmelskörpers (d. i. durch die Punkte B, B'') mit der Ekliptik, so werde die Länge dieses Punktes mit K, die Neigung des eben erwähnten größten Kreises mit J bezeichnet. Dabei ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang}\beta = \sin(\lambda - K)\operatorname{tang}J \\ &\operatorname{tang}\beta'' = \sin(\lambda'' - K)\operatorname{tang}J, \end{aligned} \tag{2}$$

aus welchen Gleichungen (ähnlich wie in Art. 13.) tang J und K erhalten werden, wobei tang J positiv genommen wird.

Durch Einführung der Hilfsgrößen J und K erhält man mit Berücksichtigung der Formel I des Art. 5., indem man für A, B, C resp. $\lambda - K$, $\lambda'' - K$, $L - K$ setzt,

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang}\beta \sin(\lambda'' - L) - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda - L) \\ &\qquad = \operatorname{tang}J \sin(\lambda'' - \lambda)\sin(L - K), \end{aligned}$$

und analoges für die übrigen Ausdrücke.

Die Gleichung (1) geht daher über in

$$\begin{aligned}
(3)\qquad & n\,R\ \sin(\lambda''-\lambda)\sin(L-K)\,\text{tang}\,J \\
& -n'\,R'\sin(\lambda''-\lambda)\sin(L'-K)\,\text{tang}\,J \\
& +n''\,R''\sin(\lambda''-\lambda)\sin(L''-K)\,\text{tang}\,J \\
& -n'\,\varrho'\,(\sin(\lambda''-\lambda)\sin(\lambda'-K)\,\text{tang}\,J \\
& \quad -\text{tang}\,\beta'\sin(\lambda''-\lambda))=0.
\end{aligned}$$

Führt man die Hilfsgröße β_0 ein durch die Gleichung

$$(4)\qquad \text{tang}\,\beta_0=\sin(\lambda'-K)\,\text{tang}\,J,$$

so folgt aus der Gleichung (3)

$$(5)\quad \frac{n'\sin(\beta'-\beta_0)}{\cos\beta_0\,\text{tang}\,J}\cdot\frac{\varrho'}{\cos\beta'}=-n\,R\sin(L-K)+n'\,R'\sin(L'-K)-n''\,R''\sin(L''-K).$$

Setzt man der Kürze halber

$$(6)\quad \frac{\sin(\beta'-\beta_0)}{\cos\beta_0\,\text{tang}J}=a_0,\quad \frac{R\sin(L-K)}{a_0}=b,\quad \frac{R'\sin(L'-K)}{a_0}=c,\quad \frac{R''\sin(L''-K)}{a_0}=d,$$

so wird aus (5)

$$(7)\qquad \frac{\varrho'}{\cos\beta'}=c-\frac{bn+dn''}{n'}.$$

Die Größe β_0 ist vermöge der Gleichung (4) die Breite des Durchschnittspunktes B_0 des Breitenkreises $B'D'$ des zweiten Punktes B' mit dem erwähnten größten. Kreise durch die beiden Punkte B und B''.

Die Größe $\beta'-\beta_0$, in der Fig. 5 durch den Bogen B_0B' versinnlicht, hängt von der Krümmung des geozentrischen Weges $BB'B''$ ab, sie ist daher im allgemeinen eine kleine Größe zweiter Ordnung, wenn die Linie $BB'B''$ eine kleine Größe der ersten Ordnung ist. Aus den Ausdrücken für a_0, b, c, d ersieht man, daß b und d kleine Größen der -2ten, d. i. große Größen der zweiten Ordnung sind.

Daraus folgt unmittelbar die Unbrauchbarkeit der Verhältnisse $\vartheta : \vartheta'$ und $\vartheta'' : \vartheta'$ als Näherungswerte für die Verhältnisse $n : n'$ und $n'' : n'$. Denn würde man in der Gleichung (7) diese Näherungswerte setzen, so würde man in den Annahmen für $n : n'$ und $n'' : n'$ kleine Größen der zweiten Ordnung vernachlässigen, wodurch man dann, wegen der großen Faktoren b und d, die Größe ϱ' im allgemeinen mit einem endlichen Fehler behaftet erhalten würde.

Schreibt man aber die Gleichung (7) in der Form

$$\frac{\varrho'}{\cos\beta'} = c - \frac{bn + dn''}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n'},$$

so können für diese Form Annahmen gemacht werden, welche zu einem brauchbaren Werte von ϱ' führen.

Setzt man in dem Faktor $\frac{bn + dn''}{n + n''}$ statt $\frac{n}{n''}$ das Verhältnis $\frac{\vartheta}{\vartheta''}$, so ist der Fehler im allgemeinen nur eine kleine Größe der ersten Ordnung; denn es ist

$$\varDelta = \frac{bn + dn''}{n + n''} - \frac{b\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta + \vartheta''} = \frac{(b-d)\,\vartheta\vartheta''\,(y'' - y)}{(\vartheta + \vartheta'')(y''\vartheta + y\vartheta'')}.$$

Nun ist, weil R'' nahe $= R$ ist, $d - b$ nahe

$$= \frac{2R}{a_0} \sin\tfrac{1}{2}(L'' - L)\cos\left(\frac{L + L''}{2} - K\right),$$

also von der Ordnung $\frac{\sin\frac{1}{2}(L'' - L)}{a_0}$ d. i. von der Ordnung -1; $\vartheta\vartheta''$ von der Ordnung $+2$, $y'' - y$ von der Ordnung $+2$, — also der Zähler der Differenz $\varDelta$ eine kleine Größe der dritten Ordnung. Der Nenner von $\varDelta$ ist eine kleine Größe zweiter Ordnung, also die Differenz $\varDelta$ im allgemeinen von der ersten Ordnung.

Der Faktor $\frac{n + n''}{n'}$ ist nach Art. 8. Gleichung (20)

$$\frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2\,r\,r'\,r''\,y\,y''\cos f\cos f'\cos f''}.$$

Da die Kosinusse der Winkel f, f', f'' von der Einheit ebenfalls nur um Größen zweiter Ordnung abweichen, so ist auf einen Fehler vierter Ordnung genau $\frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2rr'r''}$. Die Verhältnisse $\frac{r}{r'}$, $\frac{r''}{r'}$ weichen, wenn man die Exzentrizität der Bahn als eine kleine Größe erster Ordnung betrachtet, von der Einheit bloß um kleine Größen zweiter Ordnung ab. Setzt man daher statt $\frac{\vartheta\vartheta''}{rr'r''}$ die Größe $\frac{\vartheta\vartheta''}{r'^3}$, so wird der Fehler von $\frac{n+n''}{n'}$ von der vierten Ordnung sein.

Faßt man das Vorhergehende zusammen, so erhält man schließlich folgendes Resultat: In der Gleichung

$$\frac{\varrho'}{\cos\beta'} = c - \frac{b\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta + \vartheta''}\left(1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2r'^3}\right)$$

ist der Fehler von ϱ' im allgemeinen nur eine kleine Größe der ersten Ordnung.

Setzt man die genauen Werte

$$\frac{n''}{n} = P, \quad \frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{Q}{2r'^3},$$

so ist in aller Strenge

$$(8) \qquad P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \cdot \frac{y}{y''}, \quad Q = \frac{\vartheta\vartheta'' r'^2}{yy'' rr'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

$$(9) \qquad \frac{\varrho'}{\cos\beta'} = c - \frac{b + dP}{1+P}\left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right).$$

Nimmt man in der Gleichung (9) für P und Q die Näherungswerte $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$, so wird die Größe ϱ' im allgemeinen mit einem Fehler erster Ordnung behaftet sein.[9])

16.

Nach der Gleichung (8) des Art. 11. ist

$$r'^2 = R'^2 + 2R'\frac{\varrho'}{\cos\beta'}\cos\delta' + \frac{\varrho'^2}{\cos\beta'^2},$$

wo $\cos \delta' = \cos \beta' \cos (\lambda' - L')$ ist, oder

$$r'^2 = R'^2 \sin \delta'^2 + \left(R' \cos \delta' + \frac{\varrho'}{\cos \beta'}\right)^2,$$

dabei bedeutet δ' den Bogen $A'B'$.

Setzt man $R' \sin \delta' = a'$, $R' \cos \delta' + \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = x'$, so wird

$$(10) \qquad r'^2 = a'^2 + x'^2, \quad \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = x' - R' \cos \delta',$$

und die Gleichung (9) geht über in

$$x' = R' \cos \delta' + c - \frac{b + dP}{1 + P} - \frac{b + dP}{1 + P} \cdot \frac{Q}{2\,(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder wenn

$$R' \cos \delta' + c = e, \quad e - \frac{b + dP}{1 + P} = \lambda, \quad \frac{b + dP}{1 + P} \cdot \frac{Q}{2} = \mu$$

gesetzt wird, in

$$(11) \qquad x' = \lambda - \frac{\mu}{(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um r' d. i. $\sqrt{a'^2 + x'^2}$ bequem zu berechnen, setze man $\operatorname{tang} z' = \frac{a'}{x'}$, so wird

$$\sqrt{a'^2 + x'^2} = r' = \frac{a'}{\sin z'} = \frac{x'}{\cos z'},$$

dabei bedeutet z' den Bogen $C'B'$.

Aus der Gleichung (11) wird die Unbekannte x' durch Versuche bestimmt, in der Regel ist x' von λ nicht sehr verschieden. Denn die hier durchgeführte Bahnbestimmung kommt fast nur bei Asteroiden in Anwendung; bei diesen ist, Eros ausgenommen (für letzteren sinkt r^3 bis 1.5 herab), r^3 größer als 5.

Die Gleichung (11) läßt sich in eine für die Untersuchung der Wurzeln bequemere Form bringen. Multipliziert man mit $\frac{a'^3}{\mu}$ und setzt $\frac{x'}{a'} = \xi$, so wird

$$\frac{a'^3 \lambda}{\mu} - \frac{a'^4}{\mu} \xi = \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \eta;$$

Da die Kosinusse der Winkel f, f', f'' von der Einheit ebenfalls nur um Größen zweiter Ordnung abweichen, so ist auf einen Fehler vierter Ordnung genau $\frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2rr'r''}$. Die Verhältnisse $\frac{r}{r'}$, $\frac{r''}{r'}$ weichen, wenn man die Exzentrizität der Bahn als eine kleine Größe erster Ordnung betrachtet, von der Einheit bloß um kleine Größen zweiter Ordnung ab. Setzt man daher statt $\frac{\vartheta\vartheta''}{rr'r''}$ die Größe $\frac{\vartheta\vartheta''}{r'^3}$, so wird der Fehler von $\frac{n+n''}{n'}$ von der vierten Ordnung sein.

Faßt man das Vorhergehende zusammen, so erhält man schließlich folgendes Resultat: In der Gleichung

$$\frac{\varrho'}{\cos\beta'} = c - \frac{b\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta + \vartheta''}\left(1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2r'^3}\right)$$

ist der Fehler von ϱ' im allgemeinen nur eine kleine Größe der ersten Ordnung.

Setzt man die genauen Werte

$$\frac{n''}{n} = P, \quad \frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{Q}{2r'^3},$$

so ist in aller Strenge

$$(8) \qquad P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \cdot \frac{y}{y''}, \quad Q = \frac{\vartheta\vartheta'' r'^2}{yy'' rr'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

$$(9) \qquad \frac{\varrho'}{\cos\beta'} = c - \frac{b + dP}{1+P}\left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right).$$

Nimmt man in der Gleichung (9) für P und Q die Näherungswerte $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$, so wird die Größe ϱ' im allgemeinen mit einem Fehler erster Ordnung behaftet sein.[9])

16.

Nach der Gleichung (8) des Art. 11. ist

$$r'^2 = R'^2 + 2R'\frac{\varrho'}{\cos\beta'}\cos\delta' + \frac{\varrho'^2}{\cos\beta'^2},$$

wo $\cos \delta' = \cos \beta' \cos (\lambda' - L')$ ist, oder

$$r'^2 = R'^2 \sin \delta'^2 + \left(R' \cos \delta' + \frac{\varrho'}{\cos \beta'}\right)^2,$$

dabei bedeutet δ' den Bogen $A'B'$.

Setzt man $R' \sin \delta' = a'$, $R' \cos \delta' + \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = x'$, so wird

(10) $$r'^2 = a'^2 + x'^2, \quad \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = x' - R' \cos \delta',$$

und die Gleichung (9) geht über in

$$x' = R' \cos \delta' + c - \frac{b + dP}{1 + P} - \frac{b + dP}{1 + P} \cdot \frac{Q}{2\,(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder wenn

$$R' \cos \delta' + c = e, \quad e - \frac{b + dP}{1 + P} = \lambda, \quad \frac{b + dP}{1 + P} \cdot \frac{Q}{2} = \mu$$

gesetzt wird, in

(11) $$x' = \lambda - \frac{\mu}{(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um r' d. i. $\sqrt{a'^2 + x'^2}$ bequem zu berechnen, setze man $\tang z' = \frac{a'}{x'}$, so wird

$$\sqrt{a'^2 + x'^2} = r' = \frac{a'}{\sin z'} = \frac{x'}{\cos z'},$$

dabei bedeutet z' den Bogen $C'B'$.

Aus der Gleichung (11) wird die Unbekannte x' durch Versuche bestimmt, in der Regel ist x' von λ nicht sehr verschieden. Denn die hier durchgeführte Bahnbestimmung kommt fast nur bei Asteroiden in Anwendung; bei diesen ist, Eros ausgenommen (für letzteren sinkt r^3 bis 1.5 herab), r^3 größer als 5.

Die Gleichung (11) läßt sich in eine für die Untersuchung der Wurzeln bequemere Form bringen. Multipliziert man mit $\frac{a'^3}{\mu}$ und setzt $\frac{x'}{a'} = \xi$, so wird

$$\frac{a'^3 \lambda}{\mu} - \frac{a'^4}{\mu}\,\xi = \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \eta;$$

es bedeuten daher die Wurzeln von (11) die Werte ξ für die Durchschnittspunkte der beiden Kurven

$$\eta = \frac{a'^3}{\mu} - \frac{a'^4}{\mu}\xi, \quad \eta = \frac{1}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die erste Kurve ist eine Gerade, welche die ξ-Achse im Punkte $\frac{\lambda}{a'}$, die η-Achse im Punkte $\frac{a'^3\lambda}{\mu}$ schneidet; die zweite Kurve ist krummlinig, gegen die η-Achse symmetrisch, die ξ-Achse ist Asymptote. Für $\xi = 0$ ist $\eta = 1$ ein Maximum; für $\xi = \pm\frac{1}{2}$ ist je ein Wendepunkt, von $\xi = 0$ bis $\xi = \pm\frac{1}{2}$ ist die Kurve konkav, von $\xi = \pm\frac{1}{2}$ bis $\xi = \pm\infty$ konvex gegen die ξ-Achse. Aus der Gestalt der Figur, begrenzt von dieser Kurve und der ξ-Achse folgt, daß jede Gerade diese Kurve in einem oder in drei Punkten schneidet. Im Falle dreier positiver Wurzeln ξ sind zwei kleiner als $\frac{1}{2}$; diese beiden Wurzeln liefern für die Gleichung (11) unbrauchbare Lösungen x', da $\varrho' : \cos\beta'$ positiv sein muß. Ebenso ist eine positive Wurzel auszuschließen, für welche ϱ' nahezu Null wird.

Ist x' gefunden, so erhält man daraus r' und ϱ'. Dann erhält man aus

$$n'' = nP, \quad \frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{Q}{2r'^3},$$

(12) $$\frac{n}{n'} = \left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right)\frac{1}{1+P}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{n}{n'}P.$$

Hat man die Größe ϱ' und die Verhältnisse $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ gefunden, so erhält man aus den Gleichungen (3) und (4) des Art. 14. die Größen ϱ und ϱ''. Bequemer werden die Formeln, wenn man noch die Gleichung (5) desselben Artikels benutzt.

Eliminiert man nämlich aus den Gleichungen (3) und (4) die Größe $n''R''$, so erhält man

$$n\,(\varrho \sin(\lambda - L'') + R \sin(L - L''))$$
$$- n'\,(\varrho' \sin(\lambda' - L'') + R' \sin(L' - L''))$$
$$+ n''\,\varrho'' \sin(\lambda'' - L'') = 0.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung und der Gleichung (5) die Größe $n''\varrho''$, so wird:

$$n\,\varrho\,(\operatorname{tang}\beta \sin(\lambda'' - L'') - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda - L''))$$
$$- n'\,\varrho'\,(\operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - L'') - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - L''))$$
$$+ \operatorname{tang}\beta''\,(nR \sin(L'' - L) - n'R' \sin(L'' - L')) = 0.$$

Führt man für $\operatorname{tang}\beta$ und $\operatorname{tang}\beta''$ die Hilfsgrößen J und K ein, so wird der Koeffizient von $n\varrho$

$$\operatorname{tang} J \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L'' - K).$$

Setzt man im Koeffizienten von $n'\varrho'$

$$\operatorname{tang}\beta' = \operatorname{tang}\beta_0 + \operatorname{tang}\beta' - \operatorname{tang}\beta_0$$
$$= \operatorname{tang} J \sin(\lambda' - K) + \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta' \cos\beta_0},$$

so geht derselbe über in

$$\operatorname{tang} J \sin(\lambda'' - \lambda') \sin(L'' - K) + \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos\beta' \cos\beta_0} \sin(\lambda'' - L'').$$

Ferner ist

$$n\,R \sin(L'' - L) - n'R' \sin(L'' - L')$$
$$= n\,R \sin(L'' - L) \left(1 - \frac{n'R' \sin(L'' - L')}{n\,R \sin(L'' - L)}\right).$$

Setzt man

$$R\,R' \sin(L' - L) = N'', \quad R'R'' \sin(L'' - L') = N,$$
$$R\,R'' \sin(L'' - L) = N',$$

so wird

$$\frac{R' \sin(L'' - L')}{R \sin(L'' - L)} = \frac{N}{N'}.$$

Es ist daher

$$(13) \quad \varrho = \left(\frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda)} + \frac{a_0 \sec\beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - L'')}{\sin(L'' - K)}\right) \cdot \frac{n'}{n}\,\varrho'$$
$$+ \frac{R \sin(L'' - L)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(L'' - K)} \left(\frac{N}{N'} \cdot \frac{n'}{n} - 1\right).$$

Ebenso erhält man, indem man den ersten Ort mit dem dritten vertauscht:

$$(14)\quad \varrho'' = \left(\frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} - \frac{a_0 \sec\beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda - L)}{\sin(L - K)}\right) \cdot \frac{n'}{n''}\varrho'$$
$$+ R'' \frac{\sin(L'' - L)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda - K)}{\sin(L - K)} \left(\frac{N''}{N'} \cdot \frac{n'}{n''} - 1\right).$$

Aus den Gleichungen (13) und (14) erhält man ϱ und ϱ''. Ist ϱ, ϱ', ϱ'' gefunden, so rechne man nach den Formeln (7) des Art. 11. und den analogen Formeln für den zweiten und dritten Ort, die heliozentrischen Längen, Breiten und Radien Vektoren des Himmelskörpers. Aus diesen Größen kann man die Elemente nach Art. 13. und Art. 6. rechnen.

17.

Wie man ersieht, setzt diese Methode voraus, daß die Werte von P und Q bekannt sind. Allein diese Größen sind unbekannt; aber man kann dafür als erste Hypothese die Näherungswerte $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\,\vartheta''$ setzen, und mit diesen Werten führe man die Rechnung, jedoch nicht bis zum Schlusse, durch; sondern hat man die Größen r, r', r'' und u, u', u'' ermittelt, so rechne man nach Art. 6. aus

r, r'; $u' - u = v' - v = 2f''$ und ϑ'' die Größe y''
r', r''; $u'' - u' = v'' - v' = 2f$ » ϑ » » y,

und damit neue Werte von P und Q nach den Formeln

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \cdot \frac{y}{y''}, \qquad Q = \frac{r'^2\,\vartheta\,\vartheta''}{r\,r''\,y\,y''\cos f \cos f' \cos f''}.$$

Mit diesen Werten von P und Q wird die Rechnung wiederholt, diese Wiederholung geschieht so oft, bis man Werte von P und Q bekommt, welche von den früheren garnicht oder nur sehr wenig verschieden sind.

In dieser Hypothese, als letzten, führe man die Rechnung mit den Größen r, r', $v' - v$, ϑ'', y'' und den Größen r', r'', $v'' - v'$, ϑ, y zu Ende. Die Übereinstimmung dient als Kontrolle. Sicherer verfährt man, namentlich bei ersten Bahnbestimmungen, wo die heliozentrische Bewegung in der Regel gering ist, wenn man in der letzten Hypothese aus den Größen l, l''; b, b''; r, r''; $v'' - v$, ϑ' die Elemente der Bahn rechnet. Als Kontrolle der Rechnung berechne man den mittleren Ort aus den erhaltenen Elementen.

Bei diesen verschiedenen Hypothesen für die Größen P und Q ist es vorteilhaft, so viele Rechnungen als möglich von den Hypothesen unabhängig zu machen und auf unmittelbar gegebene Größen zurückzuführen. Die Größen K, tang J, a_0, b, c, d, e, a' ... hängen nur von den gegebenen Beobachtungsdaten ab, werden daher nur einmal gerechnet. Dasselbe gilt auch von den Koeffizienten von $\frac{n'}{n}\varrho'$, $\frac{N}{N'} \cdot \frac{n'}{n} - 1$, .. der Gleichungen (13) und (14).

Zusatz. Die Sicherheit dieser Rechnungen hängt hauptsächlich von der Bestimmung der Konstanten tang J und K und von der Größe des Bogens $B_0 B' = \beta' - \beta_0$ ab. Fällt der erste geozentrische Ort mit dem dritten nahe zusammen, so kann man aus den Gleichungen (2) die Größen tang J und K nicht genau bestimmen. Liegen die drei geozentrischen Orte B, B', B'' nahe in einem größten Kreise, so ist der Bogen $B_0 B'$ eine kleine Größe höherer Ordnung als zweiter; die dargestellte Methode der Bahnbestimmung ist daher nicht anwendbar. Dieser Fall tritt dann immer ein, wenn die Neigung der Bahn sehr klein ist (oder nahe 180° beträgt).

18.

Zur Erläuterung dieser Methode soll folgendes von Gauß gegebenes Beispiel dienen*). Für den Planeten Juno sind als Beobachtungen und zugehörige Erdorte gegeben:

	1804 Okt. 5.458644
Beobachtungszeiten auf den Pariser Meridian reduziert.	17.421885
	27.393077

$$\lambda = 354^\circ\,44'\,31''.60 \qquad \beta = -\,4^\circ\,59'\,31''.06$$
$$\lambda' = 352^\circ\,34'\,22''.12 \qquad \beta' = -\,6^\circ\,21'\,55''.07$$
$$\lambda'' = 351^\circ\,34'\,30''.01 \qquad \beta'' = -\,7^\circ\,17'\,50''.95$$
$$L = 12^\circ\,28'\,27''.76 \qquad \log R = 9.9996826$$
$$L' = 24^\circ\,19'\,49''.05 \qquad \log R' = 9.9980979$$
$$L'' = 34^\circ\,16'\,\;9''.65 \qquad \log R'' = 9.9969678,$$

welche Größen auf das mittlere Frühlings-Äquinox 1805.0 bezogen sind. Damit erhält man

$$\log \operatorname{tang} J = 9.8718259, \qquad K = 1^\circ\,28'\,49''.34$$
$$\beta_0 = -\,6^\circ\,34'\,31''.394$$
$$\log a_0 = 7.6953221$$
$$b = 38.43487$$
$$c = 77.976545$$
$$\log d = 2.0352814$$
$$R' \cos \delta' = 0.8413488$$
$$e = 78.817894$$
$$\log a' = 9.7262084.$$

Setzt man

$$\varrho = A\varrho'\frac{n'}{n} + B\left(\frac{N}{N'}\cdot\frac{n'}{n} - 1\right)$$
$$\varrho'' = A''\varrho'\frac{n'}{n''} + B''\left(\frac{N''}{N'}\cdot\frac{n'}{n''} - 1\right),$$

*) Eine Bahnbestimmung bei kleinen Zwischenzeiten (etwa 5—15 Tagen zwischen je zwei Beobachtungen) muß mit aller Schärfe siebenstelliger Logarithmen gerechnet werden. Bei größeren Zwischenzeiten reicht man auch mit sechsstelligen Logarithmentafeln aus.

so wird

$$\log A \;\;= 9.6317132 \qquad \log B \;\;= 0.3290193$$
$$\log A'' = 9.7331305 \qquad \log B'' = 0.6134162$$
$$\log N : N' = 9.6657486 \quad \log N'' : N' = 9.7441299$$
$$\log \vartheta \;\;= 9.2343285 \qquad \log \vartheta'' = 9.3134303.$$

Alle diese Zahlen sind von den verschiedenen Hypothesen für P und Q unabhängig.

In erster Hypothese setze man:

$$\log P = 0.0791018, \qquad \log Q = 8.5477588,$$

damit erhält man

$$\lambda = 2.189052$$
$$\log \mu = 0.1311211.$$

Nun löse man die Gleichung

$$x' = \lambda - \frac{\mu}{(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

nach x' auf. Für die kleinen Planeten liegt $r' = \sqrt{a'^2 + x'^2}$ ungefähr zwischen 2 und 3. Man setze nun $3 \log r' = 1.00$ und $3 \log r' = 1.30$; damit erhält man $x' = 2.054$ und $x' = 2.121$.

Substituiert man diese Werte in die obige Gleichung, so erhält man -0.0066 und -0.0613 als Fehler, und damit nach der *regula falsi* $x' = 2.0459$ als genaueren Wert, aus welchem $x' = 2.045902$ als definitiver Wert von x' erhalten wird.

Die reellen Wurzeln der vorigen Gleichung liegen bei $x_1 = -0.580$, $x_2 = +0.850$, $x_3 = 2.0459$; die positive Wurzel x_2 ist nahezu $R' \cos \delta'$, für diese wird ϱ' nahezu Null. Diese Wurzel bezieht sich auf den Erdort und kommt bei Bahnbestimmungen mit kleinen Zwischenzeiten gewöhnlich vor. Der Grund liegt darin, daß der Erdort, von dem aus die geozentrischen Richtungen des Planeten genommen

werden, ebenfalls den drei Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14. genügt.

Wird diese Gleichung durch Wegschaffung der Quadratwurzel geordnet in

$$(x' - \lambda)^2 (a_1{}^2 + x'^2)^3 = \mu^2,$$

so kommt noch die reelle positive Wurzel $x_4 = + 2.2928$ hinzu, die der Gleichung (11) fremd ist.

Mit dem definitiven Wert von x' wird erhalten

$$\log \varrho' = 0.0781403, \qquad \log r' = 0.3251111$$
$$\log \varrho = 0.0651853, \qquad \log \varrho'' = 0.0961795$$
$$l = 2^\circ\, 56'\; 7''.96$$
$$l' = 6^\circ\, 57'\, 15''.19$$
$$l'' = 10^\circ\, 22'\, 37''.72$$
$$\log \operatorname{tang} b = n\, 8.6769275 \qquad \log r = 0.3299972$$
$$\log \operatorname{tang} b' = n\, 8.8013853 \qquad \log r' = 0.3251113$$
$$\log \operatorname{tang} b'' = n\, 8.8835959 \qquad \log r'' = 0.3212583.$$

Aus l, l'', tang b, tang b'' erhält man

$$☊ = 171^\circ\, 5'\, 46''.47$$
$$i = 13^\circ\, 2'\, 31''.68$$

und damit $\log \operatorname{tang} b' = n\, 8.8013852$. Die Übereinstimmung der beiden Werte von $\log r'$ und $\log \operatorname{tang} b'$ dient als Kontrolle.

Nun erhält man $u = 192^\circ\, 8'\, 36''.96$ und

$$u' - u = 2f'' = 4^\circ\;\; 6'\, 44''.53$$
$$u'' - u' = 2f = 3^\circ\, 29'\, 47''.09$$
$$u'' - u = 2f' = 7^\circ\, 36'\, 31''.62.$$

Aus r, r', f'' und ϑ'' erhält man $\log y'' = 0.0003191$.
Aus r', r'', f und ϑ erhält man $\log y = 0.0002285$.

Damit erhält man folgende Werte von P und Q

$$\log P = 0.0790112, \qquad \log Q = 8.5476184,$$

dabei weicht $\log P$ von dem früheren um 906, $\log Q$ um

1404 Einheiten der siebenten Decimale ab. Mit diesen neuen Werten von P und Q wiederhole man die Rechnung.

Es wird

$$\lambda = 2.192683, \qquad \log \mu = 0.1309601$$

und damit

$$x' = 2.050484, \qquad \log r' = 0.3260214$$

$$\log \varrho' = 0.0797892$$

$$\log \varrho = 0.0666582, \qquad \log \varrho'' = 0.0979442$$

$$l = 2^\circ\, 55'\, 13''.71$$

$$l' = 6^\circ\, 55'\, 24''.83$$

$$l'' = 10^\circ\, 19'\, 56''.40$$

$$\log \operatorname{tang} b = n\, 8.6776066, \qquad \log r = 0.3307925$$

$$\log \operatorname{tang} b' = n\, 8.8021271, \qquad \log r' = 0.3260214$$

$$\log \operatorname{tang} b'' = n\, 8.8843618, \qquad \log r'' = 0.3222617.$$

Aus l, l'', tang b, tang b'' erhält man

$$\Omega = 171^\circ\, 7'\, 53''.84$$

$$i = 13^\circ\, 6'\, 54''.20$$

und damit log tang $b' = 8.8021268$ als Kontrolle. Ferner wird $u = 192^\circ\, 5'\, 43''.45$ und

$$u' - u = 2f'' = 4^\circ\, 5'\, 51''.31$$

$$u'' - u' = 2f = 3^\circ\, 28'\, 58''.56$$

$$u'' - u = 2f' = 7^\circ\, 34'\, 49''.87$$

$$\log y = 0.0002270, \qquad \log y'' = 0.0003172.$$

Damit erhält man folgende neue Werte von P und Q

$$\log P = 0.0790116, \qquad \log Q = 8.5476326,$$

welche von den vorigen resp. um 4 und 142 Einheiten der siebenten Decimale abweichen. Diese Unterschiede sind so klein, daß eine nochmalige Wiederholung der Rechnnng nicht mehr nötig ist. Der größere Unterschied in log Q hat, da Q nur eine kleine Größe zweiter Ordnung ist, auf die Rechnung keinen Einfluß.

Wegen der Kleinheit der heliozentrischen Bewegung rechne man aus r, r'', $u'' - u$ und ϑ' die Elemente in der Bahn. Diese Berechnung ist im Beispiele des Art. 6. durchgeführt.

Aus u und v erhält man

$$u - v = \Pi - \Omega = 241^\circ\ 9'\ 34''.06.$$

Stellt man die gefundenen Elemente zusammen, so erhält man für den Planeten Juno folgende Elemente:

$$\begin{aligned} &\text{Epoche 1804, Okt. 5.458644} \\ M &= 329^\circ\ 44'\ \ 2''.84 \\ \Pi &= 312^\circ\ 17'\ 27''.90 \\ \Omega &= 171^\circ\ \ 7'\ 53''.84 \\ i &= 13^\circ\ \ 6'\ 54''.20 \\ \varphi &= 14^\circ\ 11'\ 16''.47 \\ \mu &= 824''.9663 \\ \log a &= 0.4223802. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle rechne man aus den erhaltenen Elementen den mittleren Ort. Die mittlere Bewegung zwischen der ersten und zweiten Beobachtung beträgt $\mu t'' = 9869''.27 = 2^\circ\ 44'\ 29''.27$, damit erhält man durch Addition zur Größe M die mittlere Anomalie

$$M' = 332^\circ\ 28'\ 32''.11,$$

und aus dieser nach Art. 3.

$$\begin{aligned} E' &= 324^\circ\ 16'\ 33''.30 \\ v' &= 315^\circ\ \ 2'\ \ 0''.76 \\ \log r' &= 0.3260215. \end{aligned}$$

Aus v' erhält man u' und damit nach (1) und (2) des Art. 10. die heliozentrische Länge und Breite l' und b'. Aus l', b' und r' erhält man nach (5) des Art. 11. die Koordinaten x', y', z'.

Aus r' und v' erhält man die Koordinaten x', y', z' auch nach Art. 12.

Aus den heliozentrischen Koordinaten erhält man die geozentrischen und damit

$$\lambda' = 352^\circ\ 34'\ 22''.22$$
$$\beta' = -\ 6^\circ\ 21'\ 55''.08$$
$$\log \varrho' = 0.0797895.$$

Der Fehler in λ' beträgt 0″.10, der Fehler in β' beträgt 0″.01. Man sieht, wie genau in diesem Beispiele die zweite Hypothese für P und Q die Beobachtungen darstellt. Bei größeren Zwischenzeiten, etwa von hundert Tagen, werden selbst bei einer völlig unbekannten Bahn nur drei oder höchstens vier Hypothesen erforderlich sein. In diesem Falle besitzt man aber in der Regel bereits genäherte Elemente, aus welchen man sich die erste Hypothese für P und Q ableitet.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei geozentrischen Beobachtungen nach der Methode von Olbers.

19.

Eliminiert man aus den Gleichungen (3), (4) und (5) des Art. 14. die Grössen $n'\varrho'$ und $n'R'$ *), so erhält man folgende Gleichung

$$n\,\varrho\,(\operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda - L') - \operatorname{tang}\beta \sin(\lambda' - L'))$$
$$+\ n''\,\varrho''\,(\operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - L') - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - L'))$$
$$-\ n R \operatorname{tang}\beta' \sin(L' - L) + n''R'' \operatorname{tang}\beta' \sin(L'' - L') = 0,$$

oder indem man das Verhältnis $\varrho'' : \varrho$ bestimmt,

$$(1)\qquad \frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{n}{n''} \cdot \frac{\operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda - L') - \operatorname{tang}\beta \sin(\lambda' - L')}{\operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - L')}$$
$$+ \frac{(-\,n R \sin(L' - L) + n''R'' \sin(L'' - L'))\operatorname{tang}\beta'}{(\operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - L))\,n''\,\varrho}.$$

*) Vergl. die Ableitung der Gleichung (13) des Art. 16.

Das zweite Glied des Verhältnisses $\frac{\varrho''}{\varrho}$ ist

$$= \frac{\operatorname{tang}\beta' R \sin(L'-L)}{\varrho(\operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda'-L') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda''-L'))}\left(\frac{R''\sin(L''-L')}{R\sin(L'-L)} - \frac{n}{n''}\right).$$

Nun ist

$$\frac{R''\sin(L''-L')}{R\sin(L'-L)} = \frac{R'R''\sin(L''-L')}{RR'\sin(L'-L)} = \frac{N}{N''}.$$

Die Verhältnisse $\frac{N}{N''}$, $\frac{n}{n''}$ weichen von den Verhältnissen $\frac{t}{t''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}$ der Zwischenzeiten nur um Größen der zweiten Ordnung ab. Der Faktor $\left(\frac{N}{N''} - \frac{n}{n''}\right)$ des zweiten Gliedes von $\frac{\varrho''}{\varrho}$ ist daher von der zweiten Ordnung; der Zähler des ersten Faktors dieses Gliedes, d. i. die Größe

$$= \operatorname{tang}\beta' R \sin(L'-L)$$

ist eine kleine Größe erster Ordnung, der Nenner

$$= \varrho(\operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda'-L') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda''-L'))$$

ebenfalls von der ersten Ordnung; denn dieser Ausdruck reduziert sich durch Einführung von Hilfsgrößen J und K auf: $-\operatorname{tang} J \sin(L'-K)\sin(\lambda''-\lambda')$. Der erste Faktor ist daher eine endliche Größe.

Es ist daher das zweite Glied des Verhältnisses $\frac{\varrho''}{\varrho}$ in der Gleichung (1) eine kleine Größe der zweiten Ordnung. Vernachlässigt man daher dieses Glied und setzt im ersten Gliede statt $\frac{n}{n''}$ die Größe $\frac{t}{t''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}$; so erhält man, bis auf einen Fehler zweiter Ordnung genau,

(2) $$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{t}{t''} \cdot \frac{\operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda-L') - \operatorname{tang}\beta \sin(\lambda'-L')}{\operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda'-L') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda''-L')},$$

oder $\varrho'' = M\varrho$, wo die Bedeutung von M klar ist.

Nach Art. 11. ist, zufolge der Gleichung (8),

(3) $$r^2 = R^2 + 2R\cos(\lambda-L)\varrho + \sec\beta^2\varrho^2;$$

ebenso

(4) $$r''^2 = R''^2 + 2R''\cos(\lambda''-L'')M\varrho + \sec\beta''^2 M^2\varrho^2.$$

Bedeutet s die Sehne zwischen dem ersten und dritten Orte des Himmelskörpers, so ist

$$s^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$$
$$= x''^2 + y''^2 + z''^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx'' + yy'' + zz'')$$
$$= r^2 + r''^2 - 2(xx'' + yy'' + zz'').$$

Setzt man statt x, y, z; x'', y'', z'' ihre Werte durch die geozentrischen Koordinaten ausgedrückt, so erhält man

$$(5)\quad s^2 = r^2 + r''^2 - 2RR''\cos(L'' - L) - 2(RM\cos(\lambda'' - L) + R''\cos(\lambda - L''))\varrho - 2(\cos(\lambda'' - \lambda) + \operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\beta'')M\varrho^2.$$

Ist t' die Zwischenzeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung, so folgt nach der Lambertschen Formel

$$(6)\qquad 6kt' = (r + r'' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r'' - s)^{\frac{3}{2}}.$$

Denkt man sich aus den Gleichungen (3), (4), (5) die Werte von r, r'', s in die Lambertsche Gleichung (6) gesetzt, so geht diese in eine Gleichung über, welche bloß die Unbekannte ϱ enthält. Aus dieser Gleichung hat man daher diese Unbekannte zu bestimmen. Diese Bestimmung geschieht am einfachsten durch Versuche. Man nimmt für ϱ einen Wert an, rechnet damit nach (3), (4), (5) die Größen r, r'', s und sieht, ob der Lambertschen Formel (6) genügt wird. Man ändert nun ϱ so lange, bis die Gleichung (6) erfüllt wird. Aus zwei Annahmen für ϱ, welche bereits der Wahrheit ziemlich nahe kommen, erhält man durch die *regula falsi* einen genauen Wert von ϱ. Aus ϱ erhält man $\varrho'' = M\varrho$. Die Bauschinger-Tafeln XXII und XXIV dienen zur Abkürzung der Rechnung.

Mit den Größen ϱ, ϱ'' und den geozentrischen Längen und Breiten rechne man r, l, b; r'', l'', b'' und hierauf nach Art. 13. und Art. 6. die Bahnelemente.

Mit den gefundenen Elementen rechne man den Ort des Himmelskörpers zur Zeit der mittleren Beobachtung.

Stimmt dieser mit dem beobachteten überein, so ist die Rechnung beendet; weicht aber der berechnete Ort von dem beobachteten um mehr als die möglichen Beobachtungsfehler ab, so verändere man die Größe M so lange, bis die Darstellung des mittleren Ortes innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler gelingt. Man kann auch hier die *regula falsi* anwenden.

20.

Wie man ersieht, besteht der Nerv der Olbersschen Methode, welche ausschließlich bei Kometenbahnen angewendet wird, in der Bestimmung des Verhältnisses $\varrho'' : \varrho$ und in der Anwendung der Lambertschen Formel. Für das Verhältnis $\varrho'' : \varrho$ wurde die Annahme gemacht, daß man für $n'' : n$ und $N'' : N$ das Verhältnis der Zwischenzeiten setzen könne, diese Annahme ist identisch mit der Voraussetzung, daß die Sehnen der Kometenbahn und der Erdbahn zwischen den äußersten Beobachtungen von den mittleren Radien Vektoren in dem Verhältnisse der Zeiten geschnitten werden, wie man aus $n'' : n = r \sin(v' - v) : r'' \sin(v'' - v)$ und $N'' : N = R \sin(L' - L) : R'' \sin(L'' - L')$ ersieht. Für die Kometenbahn haben bereits Euler und Lambert diese Voraussetzung gemacht. Olbers dehnte diese Voraussetzung auch auf die Erdbahn aus und erhielt dadurch diese höchst einfache Methode der Berechnung einer Kometenbahn.

21.

Zur Erläuterung dieser Methode soll ein von Gauß gegebenes Beispiel dienen*). Für den zweiten Kometen vom Jahre 1813 hat man folgende Angaben.

*) Für Kometenbahnen genügt häufig eine fünfstellige Rechnung.

Mittlere Göttinger Zeit.	Länge.	Breite.
1813 April 7.55002	$\lambda = 271^\circ\, 16'\, 38''$	$\beta = +\, 29^\circ\ \ 2'\ \ 0''$
14.54694	$\lambda' = 266^\circ\, 27'\, 22''$	$\beta' = +\, 22^\circ\, 52'\, 18''$
21.59931	$\lambda'' = 256^\circ\, 48'\ \ 8''$	$\beta'' = +\ \ 9^\circ\, 53'\, 12''$

$$L = 197^\circ\, 47'\, 41'' \qquad \log R = 0.00091$$
$$L' = 204^\circ\, 38'\, 45'' \qquad \log R' = 0.00175$$
$$L'' = 211^\circ\, 31'\, 25'' \qquad \log R'' = 0.00260.$$

Damit erhält man

$$\log M = 9.75799, \qquad 6\,k\,t' = 1.4501$$
$$r = \sqrt{1.00420 + 0.56981\,\varrho + 1.30810\,\varrho^2}$$
$$r'' = \sqrt{1.01205 + 0.81092\,\varrho + 0.33805\,\varrho^2}$$
$$s = \sqrt{0.05765 - 0.22389\,\varrho + 0.42612\,\varrho^2}.$$

Nun suche man (durch passende Wahl von ϱ) die Werte von r, r'', s so zu bestimmen, daß der Gleichung

$$(r + r'' + s)^{\frac{3}{2}} - (r + r'' - s)^{\frac{3}{2}} - 6\,k\,t' = X = 0$$

genügt wird. Setzt man $\varrho = 1$, so wird $r = 1.70$, $r'' = 1.47$, $s = 0.51$ und $X = +\,1.27$; also ist ϱ zu groß. Setzt man $\varrho = \frac{1}{2}$, so wird $r = 1.26$, $r'' = 1.23$, $s = 0.23$ und $X = -\,0.35$; also ist ϱ zu klein. Aus den beiden Werten für X schließt man, daß ϱ nahe $= 0.6$ ist. Man erhält nun mit den Werten $\varrho = 0.60$ und $\varrho = 0.65$

$\varrho = 0.60$	$\varrho = 0.65$
$r = 1.34797$	$r = 1.38830$
$r'' = 1.27290$	$r'' = 1.29690$
$s = 0.27700$	$s = 0.30358$
$X = -\,0.1055$	$X = +\,0.0598$

und damit $\varrho = 0.632\ldots$ Rechnet man nun mit $\varrho = 0.632$ und $\varrho = 0.637$, so wird

$$\begin{array}{ll} \varrho = 0.632 & \varrho = 0.637 \\ r = 1.37364 & r = 1.37770 \\ r'' = 1.28824 & r'' = 1.29065 \\ s = 0.29386 & s = 0.29656 \\ \hline X = -0.0125 & X = +0.0022 \end{array}$$

und damit $\varrho = 0.63625$, woraus folgt

$$\log \varrho = 9.80364, \qquad \log \varrho'' = 9.56163$$

$$l = 225^\circ\, 4'\, 22'', \quad \log \operatorname{tang} b = 9.42381, \quad \log r = 0.13896$$

$$l'' = 223^\circ\, 6'\, 55'', \quad \log \operatorname{tang} b'' = 8.69316, \quad \log r'' = 0.11068.$$

Da $l > l''$ ist, so ist $i > 90^\circ$. Damit erhält man

$$i = 98^\circ\, 58'\, 57''$$

$$\Omega = 42^\circ\, 40'\, 8''$$

$$u = 164^\circ\, 57'\, 1'', \qquad u'' = 177^\circ\, 8'\, 36''.$$

Damit erhält man nach Art. 6.

$$\Pi = 247^\circ\, 42'\, 25''$$

$$\log q = 0.08469.$$

Für die Perihelzeit T erhält man

aus v ... T = April 49.518

aus v''... T = April 49.517

also im Mittel T = Mai 19.5175.

Berechnet man mit diesen Elementen den mittleren Kometenort (vergl. Art. 4.), so findet man

$$\lambda' = 266^\circ\, 27'\, 15'', \qquad \beta' = +\, 22^\circ\, 52'\, 18''.$$

Die Länge stimmt bis auf 7″, die Breite vollkommen mit der Beobachtung überein.[10])

Dritter Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus vier geozentrischen Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind.

22.

Die im ersten Abschnitte dargestellte Methode, eine elliptische Bahn zu bestimmen, ist — wie bereits im Art. 17. erwähnt wurde — in manchen Fällen nicht anwendbar. In solchen Fällen kann man aus vier Längen und zwei Breiten die Bahn bestimmen.

Es seien also vier geozentrische Beobachtungen gegeben, der Bequemlichkeit der Rechnung halber werden die vier Längen und die beiden mittleren Breiten benützt; die äußersten Breiten sind nicht erforderlich, dienen jedoch schließlich als Kontrolle der Rechnung. Die Bedeutung der Buchstaben ist hier dieselbe, wie im ersten Abschnitte; d. h. es sind also

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$
$$\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$$

die Längen und Breiten des Himmelkörpers u. s. w., $t_{01}, t_{02}, \ldots$ die Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten, ersten und dritten, ... Beobachtung. Analog ist die Bedeutung von

$$n_{01}, n_{02}, \ldots \text{ und } y_{01}, y_{02}, \ldots$$

als doppelte Dreiecksflächen und Verhältnisse des elliptischen Sektors zum zugehörigen Dreiecke.

Nach Art. 14. Gleichung (3) und (4) ist:

$$n_{12}(\varrho \cos\lambda + R\cos L) - n_{02}(\varrho_1 \cos\lambda_1 + R_1 \cos L_1)$$
$$+ n_{01}(\varrho_2 \cos\lambda_2 + R_2 \cos L_2) = 0,$$
$$n_{12}(\varrho \sin\lambda + R\sin L) - n_{02}(\varrho_1 \sin\lambda_1 + R_1 \sin L_1)$$
$$+ n_{01}(\varrho_2 \sin\lambda_2 + R_2 \sin L_2) = 0.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen die Größe ϱ, so erhält man

$$(1)\quad n_{12} R \sin(L-\lambda) - n_{02}(\varrho_1 \sin(\lambda_1-\lambda) + R_1 \sin(L_1-\lambda)) + n_{01}(\varrho_2 \sin(\lambda_2-\lambda) + R_2 \sin(L_2-\lambda)) = 0.$$

Ebenso folgt aus der zweiten, dritten und vierten Beobachtung, indem man aus denselben Gleichungen des Art. 14. die Größe ϱ_3 eliminiert,

$$(2)\quad n_{23}(\varrho_1 \sin(\lambda_1-\lambda_3) + R_1 \sin(L_1-\lambda_3)) - n_{13}(\varrho_2 \sin(\lambda_2-\lambda_3) + R_2 \sin(L_2-\lambda_3)) + n_{12} R_3 \sin(L_3-\lambda_3) = 0.$$

Die Gleichung (1) läßt sich umformen in

$$n_{12} R \sin(L-\lambda) - n_{02} \sin(\lambda_1-\lambda) \cos\beta_1 \left(\frac{\varrho_1}{\cos\beta_1} + \frac{R_1 \sin(L_1-\lambda)}{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda)}\right) + n_{01} \sin(\lambda_2-\lambda) \cos\beta_2 \left(\frac{\varrho_2}{\cos\beta_2} + \frac{R_2 \sin(L_2-\lambda)}{\cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\lambda)}\right) = 0$$

oder in

$$\frac{n_{12}}{n_{01}} \cdot \frac{R \sin(L-\lambda)}{\cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\lambda)} - \frac{n_{02}}{n_{01}} \cdot \frac{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda)}{\cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\lambda)} \left(\frac{\varrho_1}{\cos\beta_1} + \frac{R_1 \sin(L_1-\lambda)}{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda)}\right) + \frac{\varrho_2}{\cos\beta_2} + \frac{R_2 \sin(L_2-\lambda)}{\cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\lambda)} = 0.$$

Setzt man analog mit der Gleichung (10), Art. 15.

$$\frac{\varrho_1}{\cos\beta_1} + R_1 \cos\delta_1 = x_1, \quad \frac{\varrho_2}{\cos\beta_2} + R_2 \cos\delta_2 = x_2,$$

so geht diese Gleichung über in

$$\frac{n_{12}}{n_{01}} \nu - \frac{n_{02}}{n_{01}} \mu_1 (x_1 + b_1) + x_2 + \varkappa_2 = 0,$$

wo der Kürze halber

$$\frac{R_1 \sin(L_1-\lambda)}{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda)} - R_1 \cos\delta_1 = b_1$$

$$\frac{R \sin(L-\lambda)}{\cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\lambda)} = \nu, \quad \frac{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1-\lambda)}{\cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\lambda)} = \mu_1$$

$$\frac{R_2 \sin(L_2-\lambda)}{\cos\beta_2 \sin(\lambda_2-\lambda)} - R_2 \cos\delta_2 = \varkappa_2$$

gesetzt wird. Setzt man $\frac{n_{12}}{n_{01}} = P_1$, so ist nach der Gleichung (12), Art. 15.

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \left(1 + \frac{Q_1}{2r_1^3}\right)\frac{1}{1+P_1}, \text{ also}$$

$$\frac{n_{02}}{n_{01}} = \frac{1+P_1}{1+\dfrac{Q_1}{2(a_1^2+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}},$$

wo die Bedeutung von Q_1 klar ist.

Man erhält daher

$$P_1\nu - \mu_1(x_1+b_1)\frac{1+P_1}{1+\dfrac{Q_1}{2(a_1^2+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}} + \varkappa_2 + x_2 = 0.$$

Setzt man außerdem

$$-\varkappa_2 - P_1\nu = c_1,\ \mu_1(1+P_1) = d_1,$$

so erhält man

$$x_2 = c_1 + \frac{d_1(x_1+b_1)}{1+\dfrac{Q_1}{2(a_1^2+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}}. \tag{3}$$

Auf dieselbe Art erhält man aus der Gleichung (2), indem man

$$\frac{R_2\sin(L_2-\lambda_3)}{\cos\beta_2\sin(\lambda_2-\lambda_3)} - R_2\cos\delta_2 = b_2$$

$$\frac{R_3\sin(L_3-\lambda_3)}{\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\lambda_3)} = \nu_3,\quad \frac{\cos\beta_2\sin(\lambda_2-\lambda_3)}{\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\lambda_3)} = \mu_2$$

$$\frac{R_1\sin(L_1-\lambda_3)}{\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\lambda_3)} - R_1\cos\delta_1 = \varkappa_1,$$

ferner

$$-\varkappa_1 - \nu_3 P_2 = c_2,\quad \mu_2(1+P_2) = d_2,$$

wo $P_2 = \frac{n_{12}}{n_{23}}$ ist, setzt

$$x_1 = c_1 + \frac{d_2(x_2+b_2)}{1+\dfrac{Q_2}{2(a_2^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}}. \tag{4}$$

Der Gang der Rechnung ist nun derselbe wie im ersten Abschnitte: man rechnet zuerst die Konstanten a_1, a_2, b_1, b_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, μ_1, μ_2, ν_1, ν_3; hierauf verschafft man sich aus den genauen Werten

$$P_1 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{01}} \cdot \frac{y_{01}}{y_{12}}, \quad P_2 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{23}} \cdot \frac{y_{23}}{y_{12}},$$

$$Q_1 = \frac{\vartheta_{01}\vartheta_{12}r_1^2}{y_{01}\,y_{12}\,r r_2 \cos f_{01} . \cos f_{02} \cos f_{12}}, \quad Q_2 = \frac{\vartheta_{12}\vartheta_{23}r_2^2}{y_{12}y_{23}r_1 r_3 \cos f_{12} \cos f_{13} \cos f_{23}}$$

in der ersten Hypothese die Werte

$$P_1 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{01}}, \; P_2 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{23}}, \; Q_1 = \vartheta_{01}\vartheta_{12}, \; Q_2 = \vartheta_{12}\vartheta_{23}, \text{ }^{5, 6)}$$

rechnet damit c_1, d_1, c_2, d_2 und löset dann die Gleichungen (3) und (4) nach x_1 und x_2 auf.

Diese Auflösung geschieht durch Versuche. Man erhält in der Regel schon Näherungswerte, wenn man $Q_1 = Q_2 = 0$ setzt, wodurch

$$x_1 = \frac{c_2 + d_2(b_2 + c_1) + d_1 d_2 b_1}{1 - d_1 d_2}, \quad x_2 = \frac{c_1 + d_1(b_1 + c_2) + d_1 d_2 b_2}{1 - d_1 d_2}$$

erhalten wird. Bei Asteroiden kann man $r_1^3 = r_2^3 = 20$, also statt d_1, d_2

$$\frac{d_1}{1 + \frac{Q_1}{40}}, \quad \frac{d_2}{1 + \frac{Q_2}{40}}$$

setzen, wodurch die Genauigkeit erhöht wird.

Ist nun ξ_1 ein Näherungswert von x_1, so setze man diesen in (3), erhält daraus $x_2 = \xi_2$, welcher Wert in (4) gesetzt $x_1 = X_1$ gibt. Wiederholt man nun die Rechnung mit $x_1 = \xi_1 + \nu_1$, so erhalte man $x_2 = \xi_2 + \nu_2$ und $x_1 = X_1 + N_1$. Aus diesen Angaben erhält man nach der *regula falsi**)

$$x_1 = \xi_1 + \frac{\nu_1(\xi_1 - X_1)}{N_1 - \nu_1}, \quad x_2 = \xi_2 + \frac{\nu_2(\xi_1 - X_1)}{N_1 - \nu_1}.$$

Aus x_1 und x_2 erhält man ϱ_1, ϱ_2 und damit (wie im ersten Abschnitte) die heliozentrischen Orte r_1, r_2; l_1, l_2; b_1, b_2; damit die Differenz der wahren Anomalien $v_2 - v_1 = u_2 - u_1$, woraus dann folgt, wegen

*) Es sind nämlich $A = \xi_1 - X_1$ und $A' = \xi_1 + \nu_1 - (X_1 + N_1)$ die Fehler der ersten und zweiten Substitution. Die Änderungen der Unbekannten x_1 und x_2 sind resp. ν_1 und ν_2.

$$\frac{n_{12}}{n_{01}} = P_1 = \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{r \sin(v_1 - v)},$$

$$\frac{n_{02}}{n_{12}} = \frac{r \sin(v_2 - v)}{r_1 \sin(v_2 - v_1)} = \frac{1 + P_1}{P_1\left(1 + \frac{Q_1}{2 r_1^3}\right)}$$

$$(5) \qquad r \sin(v_1 - v) = \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{P_1} \text{ und}$$

$$r \sin(v_2 - v) = \frac{1 + P_1}{P_1\left(1 + \frac{Q_1}{2 r_1^3}\right)} r_1 \sin(v_2 - v_1),$$

oder, da $v_2 - v = v_2 - v_1 + (v_1 - v)$ ist,

$$(6) \quad r \cos(v_1 - v) = \frac{r_1 (1 + P_1)}{P_1\left(1 + \frac{Q_1}{2 r_1^3}\right)} - \cot(v_2 - v_1) \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{P_1}.$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) erhält man r und $v_1 - v$. Ebenso erhält man r_3 und $v_3 - v_2$ aus den Gleichungen

$$(7) \qquad r_3 \sin(v_3 - v_2) = \frac{r_1 \sin(v_2 - v_1)}{P_2}$$

$$(8) \quad r_3 \cos(v_3 - v_2) = \frac{r_2 (1 + P_2)}{P_2\left(1 + \frac{Q_2}{2 r_2^3}\right)} - \cot(v_2 - v_1) \frac{r_1 \sin(v_2 - v_1)}{P_2}.$$

Nun bestimme man, wie im ersten Abschnitte, neue verbesserte Werte von P_1, P_2, Q_1, Q_2; in letzter Hypothese führe man die Berechnung der Elemente zu Ende. Ist die heliozentrische Bewegung sehr klein, so kann man aus r, r_3, $v_3 - v$, t_{03} die Elemente in der Bahn rechnen.

Mit den erhaltenen Elementen berechne man die beiden äußersten Orte; man ersieht dann, mit welchem Grade der Genauigkeit die äußersten Breiten durch die gefundenen Elemente dargestellt werden.

Vierter Abschnitt.

Über die Vorbereitungsrechnungen bei Bahnbestimmungen.

23.

In den drei ersten Abschnitten wurde die Voraussetzung gemacht, daß die zur Bahnbestimmung verwendeten Beobachtungen die wahren geozentrischen Orte (Länge und Breite) des Himmelskörpers seien. Die Beobachtungen, wie sie unmittelbar gegeben sind, sind scheinbare Rektaszensionen und Deklinationen; es sind daher eine Reihe von Vorbereitungsrechnungen nötig, um dieselben in geozentrische Länge und Breite zu verwandeln. Es soll daher hier zunächst die Theorie dieser Rechnungen gegeben werden.

I. Verwandlung von Rektaszension und Deklination in Länge und Breite und umgekehrt.

24.

Es seien α, δ die Rektaszension und Deklination, λ, β die Länge und Breite eines Sternes, ε die Schiefe der Ekliptik.

Die hieher gehörigen Formeln werden auf folgende Art erhalten. Sind x_0, y_0, z_0 die heliozentrischen Koordinaten eines Punktes in Bezug auf die Ekliptik als xy-Ebene; x, y, z die Koordinaten in Bezug auf den Aequator als xy-Ebene (die x-Achse für beide Systeme nach dem Frühlingspunkte gerichtet), so ist, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet,

$$x_0 = x$$
$$y_0 = y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon$$
$$z_0 = z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon.$$

$$x = x_0$$
$$y = y_0 \cos \varepsilon - z_0 \sin \varepsilon$$
$$z = y_0 \sin \varepsilon + z_0 \cos \varepsilon.$$

Drückt man analog wie im Art. 10. die rechtwinkligen Koordinaten durch die Polarkoordinaten aus, so erhält man aus diesen beiden Systemen die bezüglichen Verwandlungsformeln von Rektaszension und Deklination in Länge und Breite und umgekehrt.

1) Gegeben sei α, δ; man bestimme λ, β.

$$\cos\lambda\cos\beta = \cos\alpha\cos\delta$$
$$\sin\lambda\cos\beta = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha$$
$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha.$$

Setzt man

$$\cos\delta\sin\alpha = m\sin M$$
$$\sin\delta = m\cos M,$$

so wird

$$\sin\lambda\cos\beta = m\sin(M+\varepsilon),\ \sin\beta = m\cos(M+\varepsilon),$$

also

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang}\alpha\,\frac{\sin(M+\varepsilon)}{\sin M}$$

$$(2)\qquad \sin\beta = \sin\delta\,\frac{\cos(M+\varepsilon)}{\cos M},$$

wo

$$\operatorname{tang} M = \sin\alpha\cot\delta$$

ist.

M wird in demjenigen Quadranten genommen, für welchen m positiv ist. Als Kontrolle der Rechnung kann die Gleichung

$$\operatorname{tang}\beta = \sin\lambda\cot(M+\varepsilon)$$

benutzt werden.

2) Gegeben sei λ, β; man bestimme α, δ.

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta$$
$$\sin\alpha\cos\delta = -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon$$
$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon.$$

Setzt man

$$\sin\beta = n\sin N$$
$$\cos\beta\sin\lambda = n\cos N,$$

so wird

(3)
$$\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} \lambda \frac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N}$$

(4)
$$\sin \delta = \sin \beta \frac{\sin(N+\varepsilon)}{\sin N},$$

wo
$$\operatorname{tang} N = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin \lambda}$$
ist.

Als Kontrolle dient die Gleichung

$$\operatorname{tang} \delta = \sin \alpha \operatorname{tang}(N+\varepsilon).$$

II. Parallaxe.

25.

Unter Parallaxe eines Planeten oder Kometen versteht man die Ortsveränderung, welche der Himmelskörper erleidet, wenn man denselben statt vom Mittelpunkte der Erde von einem Punkte der Oberfläche der Erde aus beobachtet. Die Erde kann man, wegen der Kleinheit der Parallaxe, als eine Kugel betrachten.

Man denke sich ein Koordinatensystem, in welchem der Äquator die xy-Ebene, der Mittelpunkt der Erde der Koordinaten-Anfangspunkt ist. Die positive x-Achse sei nach dem Frühlingspunkte, die positive y-Achse nach dem Punkte 90° Rektaszension gerichtet. Sind X, Y, Z die Koordinaten des Bobachtungsortes, so ist

$$X = \varrho \cos \varphi \cos \Theta, \quad Y = \varrho \cos \varphi \sin \Theta, \quad Z = \varrho \sin \varphi,$$

wo ϱ den Radius der Erde, φ die geographische Breite und Θ die Sternzeit des Beobachtungsortes bedeutet.

Sind x, y, z die Koordinaten des Himmelskörpers; α, δ die Rektaszension und Deklination, Δ die Entfernung vom Ursprunge, so ist

$$x = \Delta \cos \delta \cos \alpha, \quad y = \Delta \cos \delta \sin \alpha, \quad z = \Delta \sin \delta.$$

Legt man durch den Beobachtungsort ein zweites paralleles

Achsensystem, sind x', y', z' die Koordinaten und α', δ', Δ' die mit der Parallaxe behaftete Rektaszension, Deklination und Entfernung des Himmelskörpers, so ist

$$x' = \Delta' \cos\delta' \cos\alpha', \quad y' = \Delta' \cos\delta' \sin\alpha', \quad z' = \Delta' \sin\delta'.$$

Aus $x = x' + X$, $y = y' + Y$, $+ z = z' + Z$ folgt

$$(1) \quad \Delta' \cos\delta' \cos\alpha' = \Delta \cos\delta \cos\alpha - \varrho \cos\varphi \cos\Theta$$

$$(2) \quad \Delta' \cos\delta' \sin\alpha' = \Delta \cos\delta \sin\alpha - \varrho \cos\varphi \sin\Theta$$

$$(3) \quad \Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta - \varrho \sin\varphi.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man α' δ', Δ' aus α, δ, Δ und umgekehrt. Bequemer ist es aber unmittelbar $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ zu bestimmen.

Multipliziert man (1) mit $- \sin\alpha$, (2) mit $+ \cos\alpha$ und addiert die Produkte, so erhält man

$$\Delta' \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) = - \varrho \cos\varphi \sin(\Theta - \alpha).$$

Multipliziert man (1) mit $+ \cos\alpha$, (2) mit $+ \sin\alpha$ und addiert die Produkte, so erhält man

$$\Delta' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) = \Delta \cos\delta - \varrho \cos\varphi \cos(\Theta - \alpha).$$

Dividiert man die beiden letzten Gleichungen, so wird

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{- \varrho \cos\varphi \sin(\Theta - \alpha)}{\Delta \cos\delta - \varrho \cos\varphi \cos(\Theta - \alpha)}.$$

Setzt man $\cos(\alpha' - \alpha) = 1 - 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)^2$, so geht die vorletzte Gleichung über in

$$\begin{aligned} \Delta' \cos\delta' &= \Delta \cos\delta - \varrho \cos\varphi \cos(\Theta - \alpha) \\ &\quad + 2 \Delta' \cos\delta' \sin \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)^2 \\ &= \Delta \cos\delta - \varrho \cos\varphi \cos(\Theta - \alpha) \\ &\quad + \Delta' \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \\ &= \Delta \cos\delta - \varrho \cos\varphi \big(\cos(\Theta - \alpha) \\ &\quad + \sin(\Theta - \alpha) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\big) \\ &= \Delta \cos\delta - \varrho \cos\varphi \frac{\cos(\Theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha'))}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}. \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze halber

$$m \sin\gamma = \sin\varphi$$

$$m \cos\gamma = \cos\varphi \frac{\cos\left((\Theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')\right)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)},$$

so wird

$$\Delta' \cos\delta' = \Delta \cos\delta - \varrho m \cos\gamma$$

$$\Delta' \sin\delta' = \Delta \sin\delta - \varrho m \sin\gamma;$$

woraus ähnlich wie früher folgt

$$\operatorname{tang}(\delta' - \delta) = \frac{-\frac{\varrho \sin\varphi}{\sin\gamma}\sin(\gamma - \delta)}{\Delta - \frac{\varrho \sin\varphi}{\sin\gamma}\cos(\gamma - \delta)}.$$

Die Größe Δ' wird nicht benötigt.

Die Größen $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ sind in der Regel sehr klein, man kann dann statt der Tangenten die Bogen setzen. Bezeichnet man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne mit R, so ist

$$\frac{\varrho}{\Delta} = \frac{\varrho : R}{\Delta : R}.$$

$\varrho : R$ ist der Sinus des Winkels, unter welchem der Radius der Erde von der Sonne aus erscheint, d. i. die Horizontalparallaxe der Sonne; bezeichnet man dieselbe mit π, so ist

$$\frac{\varrho}{R} = \sin\pi = \pi, \text{ da } \pi = 8''.80 \text{ ist.}$$

Die Größe Δ drückt man immer in Teilen von R aus und bezeichnet diese Zahl mit Δ, so daß man statt $\frac{\varrho}{\Delta}$ die Größe $\frac{\pi}{\Delta}$ setzen kann. Berücksichtigt man ferner, daß $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b}$ ist, wenn x gegen b sehr klein ist, so erhält man für die Größen $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ die Ausdrücke

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\pi \cos\varphi \sin(\Theta - \alpha)}{\Delta \cos\delta}$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos(\Theta - \alpha)}$$

$$\delta' - \delta = -\frac{\pi \sin\varphi \sin(\gamma - \delta)}{\Delta \sin\gamma},$$

wenn man außerdem statt $\Theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ die Größen $\Theta - \alpha$ setzt. Die letzteren Ausdrücke erhält man etwas einfacher, wenn man in $\Delta' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha)$ die Größe $\cos(\alpha' - \alpha) = 1$ setzt. Da π in Sekunden ausgedrückt ist, so erhält man dadurch $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ unmittelbar in Sekunden ausgedrückt.

Der Winkel $\Theta - \alpha$ ist der Stundenwinkel der Beobachtung; für den Meridian ist derselbe $= 0$, also

$$\alpha' - \alpha = 0, \quad \gamma = \varphi, \quad \delta' - \delta = -\frac{\pi \sin(\varphi - \delta)}{\Delta}.$$

Setzt man in den gefundenen Ausdrücken statt der Rektaszension und Deklination die Länge und Breite des Gestirns, und nimmt statt Θ und φ die daraus nach Art. 24. berechnete Länge l und Breite b des Beobachtungsortes, so erhält man die Ausdrücke für die Parallaxe in Länge und Breite.

26.

Die im vorigen Artikel erhaltenen Ausdrücke für die Parallaxe setzen die Entfernung Δ des Gestirns als bekannt voraus, für eine erste Bahnbestimmung kann daher diese Reduktion nicht durchgeführt werden.

Will man dennoch die Parallaxe berücksichtigen, so kann man sich der folgenden (von Gauß gegebenen) Methode bedienen.

Gauß führt nämlich statt des Beobachtungsortes den Durchschnittspunkt F der von dem Beobachtungsorte nach dem Gestirne gezogenen Richtungslinie mit der Ekliptik ein.

Es seien l, b, ϱ die Länge, Breite und Distanz des Beobachtungsortes auf den Mittelpunkt der Erde bezogen.

λ, β, Δ die Länge, Breite und Distanz des Gestirnes in Bezug auf den Beobachtungsort.

L, B, R die heliozentrische Länge, Breite und Distanz des Mittelpunktes der Erde.

L', B', R' dieselben Größen des Punktes F, wo also $B' = 0$ ist.

$\varDelta + \delta$ die Distanz des Gestirnes vom Punkte F.

Nun bestimme man die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ des Beobachtungsortes in Bezug auf die Sonne als Koordinatenanfang und ein Achsensystem wie in Art. 11. Diese Bestimmung kann auf zweifache Art durchgeführt werden:

1) Man gehe von der Sonne zum Punkte F und von F zum Beobachtungsort, man erhält für die Koordinaten ξ, η, ζ die Werte

$$\begin{aligned} \xi &= R' \cos L' + \delta \cos\beta \cos\lambda \\ \eta &= R' \sin L' + \delta \cos\beta \sin\lambda \\ \zeta &= \delta \sin\beta. \end{aligned}$$

2) Man gehe von der Sonne zum Mittelpunkte der Erde und von diesem Punkte zum Beobachtungsort, man erhält dadurch

$$\begin{aligned} \xi &= R \cos B \cos L + \varrho \cos b \cos l \\ \eta &= R \cos B \sin L + \varrho \cos b \sin l \\ \zeta &= R \sin B + \varrho \sin b. \end{aligned}$$

Durch Gleichstellung dieser Ausdrücke ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung wie im vorigen Artikel, wenn man statt $\cos B$, $\cos(L' - L)$ die Einheit, statt $\sin B$, $\sin(L' - L)$ die Bogen B, $L' - L$ setzt,

$$R' = R + \pi \cos b \cos(l - L) - \mu \cos(\lambda - L)$$

$$L' - L = \frac{\pi \cos b \sin(l - L) - \mu \sin(\lambda - L)}{R'},$$

wo $\mu = (RB + \pi \sin b) \cot\beta$ ist.

Behält man in R' die Größen π und μ in Sekunden bei, so ist

$$R' = R + \frac{\pi \cos b \cos(l - L) - \mu \cos(\lambda - L)}{206265}.$$

Die Größe $\delta = \frac{\mu}{\cos\beta}$ wird dadurch $= \frac{\mu}{206265 \cos\beta}$.

Da das Licht die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne in 498.5 Sekunden zurücklegt, so braucht es, um die Distanz δ zurückzulegen, die Zeit

$$\tau = 498.5\,\delta = \frac{498.5^s\,\mu}{206265 \cos\beta};$$

diese Zeit muß zur Beobachtungszeit addiert werden, um die entsprechende Zeit für den Punkt F zu erhalten.

Beispiel.

$$\lambda = 354^\circ\,45', \quad \beta = -4^\circ\,59'.5, \quad l = 24^\circ\,29', \quad b = 46^\circ\,53'$$
$$L = 12^\circ\,29', \quad B = +0''.49, \quad \log R = 9.9995, \quad \pi = 8''.6.$$

Daraus folgt $\log\mu = n\,1.8891$, und damit

$$\log \pi \cos b \cos(l - L) \sin 1'' = 5.4452$$
$$\log \mu \cos(\lambda - L) \sin 1'' = n\,6.5536$$
$$\text{Zahl} = +\,0.0000279, \quad \text{Zahl} = -\,0.0003577$$
$$R' - R = +\,0.0003856.$$
$$\log \frac{\pi \cos b \sin(l - L)}{R'} = 0.0875, \quad \log \frac{\mu \sin(\lambda - L)}{R'} = 1.3732$$
$$\text{Zahl} = +\,1''.22, \qquad \text{Zahl} = +\,23''.61$$
$$L' - L = -\,22''.39;$$

Reduktion der Zeit $= -\,0.19$ Sekunden, also verschwindend.

III. Aberration des Lichtes.

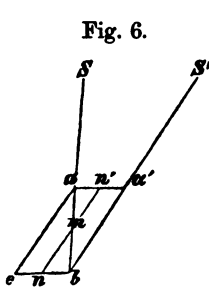
27.

Unter Aberration versteht man jene scheinbare Ortsveränderung, welche ein Gestirn infolge der Bewegung der Erde und der endlichen Geschwindigkeit des Lichtes erleidet.

Die Ortsveränderung, welche infolge der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne entsteht, heißt die jährliche, jene Ortsveränderung, welche infolge der Achsendrehung der Erde entsteht, die tägliche Aberration; wegen der Kleinheit der letzteren soll hier nur die erstere behandelt werden. Bei dieser Untersuchung genügt es, die Erdbahn als einen Kreis mit dem Radius R = der mittleren Entfernung vorauszusetzen.

Es sei (Fig. 6) S ein Stern in der Richtung baS; legt das Licht den Weg ab zurück, während die Erde*) den Weg cb macht, so muß das Fernrohr in die Lage ca gebracht werden, sodaß a das Objektiv und c das Okular vorstellt: denn in dieser Lage bleibt das Licht beständig in der Achse des Fernrohres. Ist nämlich das Fernrohr in die parallele Lage nn' gekommen und ist m der Durchschnitt der Geraden nn' und ab, so folgt

Fig. 6.



$$am : ab = cn : cb$$

oder $am : cn = ab : cb$ = Verhältnis der Geschwindigkeiten des Lichtes und der Erde.

Ist daher $ba' \parallel ca$, so sieht man den Stern in der Richtung ba' etwa in S'; es erleidet daher der Stern eine Ortsveränderung, welche gleich ist dem Winkel $\Theta = SbS' = aba'$. Der größte Wert dieses Winkels ist bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{cb}{ab},$$

d. i. durch das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Erde

*) D. i. der Mittelpunkt der Erde, in welchem das Auge des Beobachters vorausgesetzt wird.

und des Lichtes; setzt man für diese ihre Werte, so erhält man $\Theta = 20''.47$.

28.

Um den Einfluß der Aberration auf die Länge und Breite eines Fixsternes zu bestimmen: sei L die heliozentrische Länge des Punktes c, $L + w$ die Länge des Punktes b; τ die Zeit, während die Erde von c nach b gelangt oder das Licht den Weg ab zurücklegt, μ die Geschwindigkeit des Lichtes, $l = ca = ba'$ die Länge des Fernrohres. Es seien ferner

λ, β die wahre, durch die Richtung ba,

λ', β' die scheinbare, durch die Richtung $ca \parallel ba'$ bestimmte Länge und Breite des Sternes.

Man lege durch den Punkt c ein Achsensystem, in welchem (wie in Art. 11.) die x-Achse nach dem Frühlingspunkte, die y-Achse nach dem Punkte 90° Länge gerichtet ist, und bestimme die Koordinaten des Punktes a. Dieses kann auf zweifache Art geschehen.

1) Man erhält unmittelbar

$$l \cos\beta' \cos\lambda', \quad l \cos\beta' \sin\lambda', \quad l \sin\beta'$$

als Koordinaten von a.

2) Man gehe von c zum Punkt b und von b zum Punkt a.

Da die Gerade cb (als Tangente an die Erdbahn im Punkte c) mit der x-Achse den Winkel $90° + L$ bildet, so sind

$$cb \cos(90° + L), \quad cb \sin(90° + L), \quad 0$$

oder, wegen $cb = Rw$,

$$-Rw \sin L, \quad Rw \cos L, \quad 0$$

die Koordinaten des Punktes b.

Ferner sind, wegen $ab = \mu\tau$,

$$\mu\tau \cos\beta \cos\lambda, \quad \mu\tau \cos\beta \sin\lambda, \quad \mu\tau \sin\beta$$

die Koordinaten von a in Bezug auf b als Anfang.

Es sind daher

$$-Rw \sin L + \mu\tau \cos\beta \cos\lambda$$
$$+Rw \cos L + \mu\tau \cos\beta \sin\lambda$$
$$\mu\tau \sin\beta$$

die Koordinaten von a in Bezug auf c als Anfang.

Man erhält daher durch Gleichstellung dieser Werte

$$l \cos\beta' \cos\lambda' = \mu\tau \cos\beta \cos\lambda - R \sin L w$$
$$l \cos\beta' \sin\lambda' = \mu\tau \cos\beta \sin\lambda + R \cos L w$$
$$l \sin\beta' = \mu\tau \sin\beta.$$

Der Quotient $\frac{w}{\tau}$ ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Sonne. Ist die Sekunde die Zeiteinheit, so folgt, da die tägliche Bewegung der Erde um die Sonne $= \frac{360^\circ}{365.2564}$ $= 59' 8''.2$ beträgt, für die Bewegung in einer Zeitsekunde $= \frac{59' 8''.2}{86400} = 0''.041067$, welche Größe hier in Teile des Halbmessers zu verwandeln ist.

Aus den obigen Gleichungen folgt auf die bekannte Weise

$$\lambda' - \lambda = \frac{R}{\mu} \cdot \frac{w}{\tau} \cos(L - \lambda) \sec\beta$$

$$\beta' - \beta = \frac{R}{\mu} \cdot \frac{w}{\tau} \sin(L - \lambda) \sin\beta.$$

Da $\frac{R}{\mu}$ = Anzahl der Zeitsekunden, in welcher das Licht die Entfernung R zurücklegt = 498.5 Sekunden (nach Pariser Konferenz 1896), so ist

$$\frac{R}{\mu} \cdot \frac{w}{\tau} = 498.5 \times 0''.041067 = 20''.47 = C, ^{*)}$$

*) Die Konstante C ist mit dem in Art. 27. erhaltenen größten Werte von Θ identisch. Denn Rw und $\mu\tau$ sind die gleichzeitigen Wege der Erde und des Lichtes, also ihr Quotient das Verhältnis der Geschwindigkeiten.

welcher Ausdruck in Sekunden beibehalten wird, um $\lambda' - \lambda$, $\beta' - \beta$ unmittelbar in Sekunden zu erhalten. Es ist daher

$$\lambda' - \lambda = 20''.47 \cos(L - \lambda) \sec\beta$$
$$\beta' - \beta = 20''.47 \sin(L - \lambda) \sin\beta.$$

Zusatz 1. Man denke sich an der Himmelskugel ein Koordinatensystem; den wahren Ort λ, β des Sternes als Koordinatenanfang, die Berührungsebene an die Kugel als xy-Ebene, die x-Achse parallel zur Ekliptik. Die Koordinaten ξ, η des Punktes λ', β' werden

$$\xi = (\lambda' - \lambda) \cos\beta = C \cos(L - \lambda)\,^{*)}$$
$$\eta = \beta' - \beta \qquad = C \sin(L - \lambda) \sin\beta.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{\xi^2}{C^2} + \frac{\eta^2}{(C \sin\beta)^2} = 1,$$

d. h. der scheinbare Ort λ', β' eines Sternes beschreibt um den wahren Ort λ, β auf der Himmelskugel in einem Jahre eine Ellipse, deren Achsen $2\,C$, $2\,C \sin\beta$ sind.

Zusatz 2. Unter jährlicher Parallaxe der Fixsterne versteht mau jene Ortveränderung, welche die Sterne erleiden, indem man sie statt von der ruhenden Sonne von der um letztere sich bewegenden Erde aus beobachtet.

Sind λ, β, Δ die heliozentrische; λ', β', Δ' die geozentrische Länge, Breite und Distanz eines Sternes, so ist

$$\Delta' \cos\beta' \cos\lambda' = \Delta \cos\beta \cos\lambda - R \cos L$$
$$\Delta' \cos\beta' \sin\lambda' = \Delta \cos\beta \sin\lambda - R \sin L$$
$$\Delta' \sin\beta' \qquad = \Delta \sin\beta,$$

woraus folgt

$$\lambda' - \lambda = - D \sin(L - \lambda) \sec\beta$$
$$\beta' - \beta = \quad D \cos(L - \lambda) \sin\beta,$$

*) Ist l der Bogen eines Parallelkreises, L der zugehörige des größten Kreises, φ der Abstand beider Kreise, so ist $l = L \cos\varphi$.

wo $D = \sin D = \frac{R}{\varDelta}$ gesetzt wurde. Die Größe D heißt die jährliche Parallaxe der Fixsterne.

Setzt man in den Formeln für die Aberration statt L die Größe $90^{0} + L$, statt C die Größe D, so erhält man die Ausdrücke für die Parallaxe. Der Verlauf der beiden Erscheinungen ist also im allgemeinen derselbe, nur sind sie um ein Vierteljahr verschieden.

Die Erscheinung der Aberration wurde von dem englischen Astronomen James Bradley beim Suchen nach der Parallaxe der Fixsterne entdeckt und erklärt.

29.

Hat das Gestirn eine eigene Bewegung, wie dies bei den Planeten und Kometen der Fall ist, so geschieht die Berechnung dsr Aberration anders.

Fig. 7.

Es seien (Fig. 7) S, A die Orte des Himmelskörpers und des Objektivs zur Zeit T; s, a die resp. Orte zur Zeit t, wo $t - T$ die Zeit ist, während welcher das Licht den Weg Sa, die Erde den Weg Aa zurücklegt. Der Lichtstrahl SA trifft das Objektiv nicht, sondern der Strahl Sa; damit dieser in das Auge des Beobachters kommt, muß das Fernrohr die Richtung ca haben, wo $cb = aa'$ der Weg der Erde in der Zeit ist, während das Licht den Weg ab zurücklegt. Ist t' die Zeit, zu welcher das Licht das Okular b erreicht, d. h. Beobachtungszeit, so ist, weil man innerhalb der kleinen Zeit $t' - T$ die Bewegung der Erde geradlinig und gleichförmig betrachten kann und das Licht eine konstante Geschwindigkeit hat

$$Aa : aa' = t - T : t' - t$$
$$Sa : ab = t - T : t' - t,$$

also $Aa : aa' = Sa : ab$, und da $\sphericalangle AaS = a'ab$ ist, so folgt
$$SA \parallel a'b \text{ oder } ac; \text{ d. h.:}$$

Der scheinbare Ort des Gestirnes zur Zeit t' ist gleich dem wahren Orte zur Zeit T. Setzt man $Sb = \Delta$, so ist die Zeit $\tau = t' - T$, welche das Licht braucht, um den Weg Δ zurückzulegen $= 498^s.5\,\Delta$, also
$$T = t' - 498^s.5\,\Delta.$$

Daraus ergeben sich folgende Regeln der Berücksichtigung der Aberration:

1) Man nehme statt der Beobachtungszeit t' die Zeit T.

2) Man befreie den beobachteten Ort von der durch die Formeln des Art. 28. bestimmten Fixsternaberration, wodurch man die Richtung ba erhält; diese Richtung ist diejenige, in welcher man den wahren Ort S des Gestirnes zur Zeit T von dem Orte b der Erde zur Zeit t' erblickt. Diese Methode ist bei einer ersten Bahnbestimmung die bequemste.

IV. Präzession und Nutation.

30.

Unter Präzession und Nutation versteht man den Inbegriff aller Veränderungen, welche der Äquator und die Ekliptik in ihren Lagen erleiden. Diese Veränderungen sind eine Folge der Anziehung des Mondes, der Sonne und der größeren Planeten auf die abgeplattete und um ihre Achse rotierende Erde. Diese Veränderungen sind teils (hauptsächlich) der Zeit proportional, teils periodisch; erstere heißen Präzession, letztere Nutation.

Die Präzession besteht in dem Zurückgehen der Nachtgleichenpunkte und der Veränderung der Schiefe der Ekliptik; dieses Zurückweichen beträgt im Jahre $1750 + t$ die Größe

$$l' = 50''.211 + 0''.000244\, t,$$

also von 1750 bis 1750 + t

$$l = 50''.211\, t + 0''.000122\, t^2.$$

Der Winkel des Äquators von 1750 + t mit der Ekliptik von 1750 + t ist

$$\varepsilon = 23^\circ\, 28'\, 18''.0 - 0''.484\, t,$$

dieser Winkel heißt die mittlere Schiefe der Ekliptik.

Die Präzession der Nachtgleichen, wodurch die Längen der Sterne um dieselbe Größe zunehmen, wurde von Hipparch (130 v. Chr.) durch Vergleichung mit den 150 Jahre älteren Beobachtungen des Timocharis entdeckt.

Die Nutation enthält die periodischen Veränderungen, dieselbe hängt hauptsächlich von der Länge des Mondsknotens ab; die Veränderungen der Länge eines Sternes und der Schiefe der Ekliptik sind resp.

$$\Delta\lambda = -17''.2 \sin \Omega, \quad \Delta\varepsilon = +9''.2 \cos \Omega,$$

wo ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens des Mondes bedeutet. Da die Knotenlinie des Mondes innerhalb 19 Jahren einen Umlauf macht, so ist die Wirkung der Nutation ähnlich jener der Aberration. Die Nutation wurde ebenfalls von Bradley entdeckt.

Man nennt die Durchschnittspunkte des wahren Äquators mit der wahren Ekliptik zur Zeit t die wahren oder scheinbaren Äquinoktialpunkte, den Winkel derselben Ebenen die wahre oder scheinbare Schiefe der Ekliptik, die von dem wahren Frühlingspunkte gezählten Längen die wahren oder scheinbaren Längen. Befreit man die Längen von der Nutation und ebenso die Schiefe der Ekliptik, so erhält man die mittleren Längen und die mittlere Schiefe der Ekliptik. Die mittleren Längen der Sterne werden daher von dem Frühlingspunkte des oben bestimmten Aquators mit der Ekliptik zur Zeit 1750 + t gezählt;

dieserPunkt heißt das mittlere Frühlingsäquinoktium von $1750 + t$.

81.

Man kann die Veränderungen der Lage der Sterne in Länge und Breite in die entsprechenden Veränderungen der Rektaszension und Deklination verwandeln. Durch die Beobachtung erhält man die scheinbare mit Aberration und Parallaxe behaftete Rektaszension und Deklination des Gestirnes.

Ist das Gestirn ein Fixstern, so befreit man die Beobachtung von der Aberration und Nutation, wodurch man die mittlere Rektaszension und Deklination zur Zeit der Beobachtung erhält. Vermittelst der bekannten Präzession kann man diese mittlere Position auf ein bestimmtes Äquinoktium und den zugehörigen Äquator beziehen. In dieser Weise sind die Fixsternverzeichnisse angelegt.

Ist das Gestirn ein Planet, so befreit man die Beobachtung von der Parallaxe, wodurch man den scheinbaren geozentrischen Ort erhält; diese Position befreit man noch von der Aberration und Nutation, wodurch man den mittleren Ort zur Zeit der Beobachtung erhält, welchen man wieder auf ein bestimmtes Äquinoktium reduzieren kann.

Die zur Bahnbestimmung zu verwendenden Beobachtungen müssen auf ein gemeinsames mittleres Äquinoktium und die zugehörige mittlere Grundebene (Äquator oder Ekliptik) bezogen werden.

82.

Um die im vorhergehenden angegebenen Reduktionen zu erläutern, mögen dieselben an den Beobachtungen des Beispieles des Art. 18. vorgenommen werden. Für den Planeten Juno gibt Gauß (Theoria motus, art. 150) folgende Daten:

Mittlere Zeit von Greenwich.	Scheinbare Rektaszension.	Scheinbare Deklination.
1804 Okt. 5 10h 51m 6s	357° 10′ 22″.35	— 6° 40′ 8″
17 9h 58m 10s	355° 43′ 45″.30	— 8° 47′ 25″
27 9h 16m 41s	355° 11′ 10″.95	— 10° 2′ 28″.

Aus den Sonnentafeln*) findet man für dieselben Zeiten:

Datum.	Scheinbare Länge der Sonne.	Abstand von der Erde.	Breite der Sonne.
Okt. 5	192° 28′ 53″.72	0.9988839	— 0″.49
17	204° 20′ 21″.54	0.9953968	+ 0″.79
27	214° 16′ 52″.21	0.9928340	— 0″.15

Nutation.	Scheinb. Schiefe der Ekliptik.
+ 15″.43	23° 27′ 59″.48
+ 15″.51	59″.26
+ 15″.60	59″.06.

Da die Entfernungen des Planeten von der Erde unbekannt sind, so kann man die Beobachtungen nicht unmittelbar von der Parallaxe und Aberration befreien. Man verwandle zunächst die scheinbaren Rektaszensionen und Deklinationen mit Anwendung der scheinbaren Schiefe der Ekliptik (nach Art. 24., Gl. (1) und (2)) in scheinbare Längen und Breiten, wodurch man erhält:

Datum.	Scheinbare Länge der Juno.	Scheinbare Breite der Juno.
Okt. 5	354° 44′ 54″.27	— 4° 59′ 31″.59
17	352° 34′ 44″.51	— 6° 21′ 56″.25
27	351° 34′ 51″.57	— 7° 17′ 52″.70.

*) Statt der Sonnentafeln bedient man sich gegenwärtig des Berliner astronomischen Jahrbuches. Auf Seite 1 die Reduktionselemente: Schiefe der Ekliptik, Präzession und Nutation. Auf den Seiten 2—21 der Sonnenephemeride findet man die Länge, Breite und den Abstand der Sonne.

Addiert man zu den Sonnenlängen 180° und verwandelt man die Breiten in die entgegengesetzten, so erhält man die Erdorte.

Nun bestimme man nach denselben Formeln für die drei Beobachtungen die Länge und Breite des Beobachtungsortes.

Für Greenwich ist $\varphi = 51^\circ\, 28'\, 39''$; da die Beobachtungen im Meridiane angestellt sind, so sind die Rektaszensionen der Juno gleich den Sternzeiten der Beobachtungen.

Man erhält für den Beobachtungsort

Datum.	Länge.	Breite.
Okt. 5	24° 29′	46° 53′
17	23° 25′	47° 24′
27	23° 1′	47° 36′.

Nun nehme man nach Art. 26. die den Erdorten entsprechenden Punkte F; man erhält

Datum.	$L' - L$	$R' - R$	Reduktion der Zeit.
Okt. 5	− 22″.39	+ 0.0003856	− 0s.19
17	− 27″.21	+ 0.0002329	− 0s.12
27	− 35″.82	+ 0.0002085	− 0s.12.

Die Reduktion der Zeit ist also verschwindend.

Nun ziehe man von den Längen der Erde die Nutation ab und reduziere dann dieselben auf ein mittleres Frühlingsäquinoktium; Gauß wählt das für den Anfang des Jahres 1805. Die jährliche Präzession beträgt im Jahre 1804: 50″.22, also bis zum Beginn des Jahres 1805 beträgt dieselbe für die drei Beobachtungen resp. 11″.87, 10″.23, 8″.86, welche Größen zu den Längen dazu addiert werden, weil dieselben mit der Zeit wachsen.

Die Aberration berücksichtigt man nach der in Art. 29. 2) angegebenen Methode: man befreit die Beobachtungen von der Fixsternaberration, diese beträgt für die Längen resp. + 19″.12, + 17″.11, + 14″.82; für die Breite — 0″.53, — 1″.18, — 1″.75, welche Größen von den Beobachtungen subtrahiert werden. Für die Erdorte sind nun die Beobachtungszeiten, für die Juno-Orte die um die Lichtzeit $493^s \Delta$ verminderten Zeiten zu nehmen. Man vernachlässigt in erster Hypothese diese Reduktion der Zeit und führt bei der Berechnung der Werte von P und Q in letzter Hypothese die verbesserten Zwischenzeiten ein.

Bringt man nun an die Beobachtungen sämtliche hier angegebene Korrektionen an, so erhält man die in Art. 18. gegebenen Daten. Die Beobachtungszeiten gibt man in Decimalteilen eines Tages statt in Stunden, Minuten und Sekunden an. Für diese Verwandlung dient die Bauschinger-Tafel III.

Bei der Methode des ersten Abschnittes erhält man unmittelbar die drei Distanzen des Planeten von der Erde. Rechnet man mit den gefundenen Werten der ersten Hypothese

$$\log \frac{\varrho}{\cos\beta} = 0.06685,\ \log \frac{\varrho'}{\cos\beta'} = 0.08083,\ \log \frac{\varrho''}{\cos\beta''} = 0.09971$$

die Korrektionen der Zeiten, so erhält man, da $493^s =$ 0.005706 Tage ist:

— 0.006655, — 0.006873, — 0.007179 Tage;

und damit die verbesserten Zeiten

Okt. 5. 451989
17. 415012
27. 385898,

woraus $t'' = 11.963023,\quad \log \vartheta'' = 9.3134223$
$t = 9.970886,\quad \log \vartheta = 9.2343153$

folgt. Berechnet man mit diesen Werten die zweite Hypothese von P und Q, so erhält man

$$\log P = 0.0790164, \quad \log Q = 8.5475972,$$

mit welchen Werten die zweite Hypothese (und ebenso, wenn nötig, die folgenden) gerechnet wird. Dadurch ist auf alle Korrektionen der Beobachtungen Rücksicht genommen.

Zusatz. Bei der Methode des dritten Abschnittes erhält man unmittelbar $\frac{\varrho_1}{\cos\beta_1}$ und $\frac{\varrho_2}{\cos\beta_2}$. Für die erste und vierte Beobachtung erhält man ϱ, ϱ_3 aus den bereits bekannten Werten r und r_3.

Es ist nämlich

$$\frac{\varrho}{\cos\beta} = x - R\cos\delta, \quad x = \sqrt{r^2 - R^2\sin\delta^2},$$

wo $\cos\delta = \cos\beta\cos(\lambda - L)$ ist.

Setzt man

$$\frac{R\sin\delta}{r} = \sin\varphi,$$

so wird $\quad x = r\cos\varphi, \; \frac{\varrho}{\cos\beta} = r\cos\varphi - R\cos\delta.$

Ebenso findet man die Distanz $\frac{\varrho_3}{\cos\beta_3}$.

Fünfter Abschnitt.

Bahnbestimmungen aus einer größeren Reihe von Beobachtungen.

33.

Zur Vergleichung der Beobachtungen mit den aus den zugehörigen Elementen berechneten Orten eines Himmelskörpers bedient man sich einer Ephemeride, d. i. einer

Tafel, welche die in konstanten Intervallen berechneten Orte des Himmelskörpers enthält. Vermittelst einer solchen über die ganze Zeit der Beobachtungsreihe sich erstreckenden Ephemeride kann man sich durch Interpolation jeden Ort leicht verschaffen. Für die größeren Planeten rechnet man die Ephemeriden für das ganze Jahr, für die kleinen Planeten meist nur für den Monat der Opposition, weil sie um diese Zeit der Erde am nächsten, und daher am besten zu beobachten sind.

Um eine Ephemeride zu berechnen, bestimmt man die mittlere Anomalie der ersten Position, addiert dann fortgesetzt die dem Intervalle entsprechende mittlere Bewegung hinzu, wodurch man die mittleren Anomalien der sämtlichen Positionen erhält. Aus den mittleren Anomalien bestimme man nach Art. 3. die exzentrischen und aus diesen die wahren Anomalien und Radienvektoren nach den Gleichungen (3), (4) des Art. 2., oder nach den Gleichungen (1) und (6)

$$r \cos v = a(\cos E - e)$$
$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E.$$

Aus r und v können unmittelbar die auf den Äquator bezogenen heliozentrischen Koordinaten erhalten werden.

Denn sind x_0, y_0, z_0 die heliozentrischen Koordinaten eines Punktes in Bezug auf die Ekliptik als xy-Ebene; x, y, z die Koordinaten in Bezug auf den Äquator als xy-Ebene (die x-Achse für beide Systeme nach dem Frühlingspunkte gerichtet), so ist, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet,

$$x = x_0$$
$$y = y_0 \cos \varepsilon - z_0 \sin \varepsilon$$
$$z = y_0 \sin \varepsilon + z_0 \cos \varepsilon.$$

Nun ist nach Art. 12.

$$x_0 = r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i$$
$$y_0 = r \sin u \cos \Omega \cos i + r \cos u \sin \Omega$$
$$z_0 = r \sin u \sin i.$$

Subsituiert man diese Werte in den obigen Gleichungen, so erhält man, wenn

$$a \sin A = \cos \Omega$$
$$a \cos A = - \sin \Omega \cos i$$
$$b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon$$
$$b \cos B = \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon$$
$$c \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon$$
$$c \cos C = \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon,$$
$$\mathfrak{A} = A + \Pi - \Omega$$
$$\mathfrak{B} = B + \Pi - \Omega$$
$$\mathfrak{C} = C + \Pi - \Omega$$

gesetzt wird,

$$x = ar \sin (\mathfrak{A} + v)$$
$$y = br \sin (\mathfrak{B} + v)$$
$$z = cr \sin (\mathfrak{C} + v).$$

Vergl. Art. 12.

Zur bequemeren Berechnung von

$$b \cos B \quad \text{und} \quad c \cos C$$

setze man

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\operatorname{tang} i}{\cos \Omega},$$

so wird

$$b \cos B = \frac{\sin i}{\sin \psi} \cos (\psi + \varepsilon)$$

$$c \cos C = \frac{\sin i}{\sin \psi} \sin (\psi + \varepsilon).$$

Allein die Berechnung von r und v ist für die Koordinaten überflüssig; man kann dieselben unmittelbar durch die exzentrische Anomalie ausdrücken.

Denn jeder Ausdruck von der Form $kr \sin(K + v)$ geht durch Substitution von $r \sin v$, $r \cos v$ über in

$$ak \cos K \cos \varphi \sin E + ak \sin K (\cos E - e).$$

Bestimmt man l, L, λ durch die Gleichungen:

$$l \sin L = ak \sin K$$
$$l \cos L = ak \cos \varphi \cos K$$
$$\lambda = - el \sin L = - eak \sin K,$$

so wird

$$kr \sin(K + v) = l \sin(L + E) + \lambda,$$

wo l, L, λ konstant sind. Die Größe r rechnet man, falls man dieselbe benötigt, nach der Formel

$$r = a - ae \cos E$$

Sind nun X, Y, Z die geozentrischen Koordinaten der Sonne (welche den heliozentrischen der Erde gleich und entgegengesetzt sind), so erhält man die geozentrische Rektaszension, Deklination und Distanz des Himmelskörpers aus

$$\Delta \cos \delta \cos \alpha = x + X$$
$$\Delta \cos \delta \sin \alpha = y + Y$$
$$\Delta \sin \delta = z + Z.$$

Die Größen α, δ sind auf den mittleren Äquator bezogen, auf welchen sich die Elemente Π, ☊, i beziehen, und auf welchen man auch die Koordinaten X, Y, Z beziehen muß. Es sind daher die Größen α, δ noch auf den scheinbaren Äquator zu beziehen; man füge daher die Präzession bis zur Zeit der Position und die für dieselbe Zeit stattfindende Nutation hinzu. Diese Rechnung kann sehr bequem mit Hilfe der in den Berliner astronomischen Jahrbüchern gegebenen Tafeln ausgeführt werden*).

*) Auf S. 22—41 findet man die auf das mittlere Äquinoktium bezogenen Sonnenkoordinaten X, Y, Z; auf S. 312—337 die für die Reduktion vom mittleren Äquinoktium auf das scheinbare erforderlichen Hilfstabellen. Die nähere Einrichtung ist in den Jahrbüchern selbst angegeben.

Bei der wirklichen Berechnung der Ephemeriden ist es nicht nötig, alle Positionen direkt zu rechnen; sondern bei den kleinen Planeten z. B. genügt es, dieselben von vier zu vier Tagen (für die Mitternacht) zu rechnen und die Zwischenpositionen zu interpolieren.

84.

Um nun einen beobachteten Ort mit Hilfe einer Ephemeride zu vergleichen, bestimme man zunächst nach den Ausdrücken

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\pi}{\varDelta} \cos\varphi \frac{\sin(\Theta - \alpha)}{\cos\delta}$$

$$\delta' - \delta = -\frac{\pi}{\varDelta} \sin\varphi \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin\gamma}$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos(\Theta - \alpha)}$$

die Parallaxe; durch Subtraktion von dem beobachteten Orte erhält man den geozentrischen Ort. In der Regel wird die Parallaxe, oder das Produkt derselben mit der Distanz $\varDelta$, von dem Beobachter angegeben. Ist dieses nicht der Fall, so muß man sich aus der angegebenen mittleren Zeit der Beobachtung die Sternzeit ableiten: dieses geschieht dadurch, daß man die mittlere Zeit in Sternzeitintervall verwandelt und die dem Beobachtungsorte entsprechende Sternzeit des Mittags dazu addiert. Die Sternzeit des Mittags ist gleich der Rektaszension der mittleren Sonne zur Zeit des Mittags. Damit kann dann die Parallaxe berechnet werden. Hilfsgrößen dazu gibt Bauschinger in Tafel XXXII.

Ist die Beobachtungszeit t, so bestimme man durch Interpolation mit dem Argumente $T = t - 498^s.5\varDelta$ die Position der Ephemeride; diese mit dem von der Parallaxe befreiten Orte verglichen, gibt den Fehler der Ephemeride

zur Zeit T, d. i. den Unterschied: **Beobachtung — Rechnung.**

Die Beobachtungen sind nämlich trotz aller Sorgfalt mit unvermeidlichen kleinen Beobachtungsfehlern behaftet; es wird daher eine aus drei oder vier Beobachtungen gerechnete Bahn nicht alle übrigen Beobachtungen genau darstellen, sondern es werden sich Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung zeigen. Diese Unterschiede werden bei den späteren Beobachtungen um so mehr wachsen, je kleiner das Bahnstück ist, welches die Beobachtungen, aus denen die Bahn gerechnet wurde, umfassen.

Hat man daher eine größere Reihe von Beobachtungen, so wird man aus diesen eine Bahn zu bestimmen suchen, welche sich allen Beobachtungen möglichst genau anschließt. Die Mittel, wodurch ein solcher Anschluß erreicht wird, sind folgende:

Man bestimmt für die ganze Reihe der Beobachtungen den Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung: es sei B der beobachtete, R der berechnete Ort. Der Unterschied $B - R$ läßt sich, wenn die Zeit t klein ist, als Funktion der Zeit t durch eine Reihe darstellen

$$B - R = a + bt + ct^2 + \cdots,$$

wo $a, b, c, \ldots$ konstant sind, und, wenn die Elemente der Bahn nicht zu ungenau sind, in der Form $B - R = a + bt$.

Es seien nun $d_1, d_2, \ldots d_n$ die den Beobachtungszeiten $t_1, t_2, \ldots t_n$ entsprechenden Unterschiede. Zählt man die Zeiten $t_1, \ldots t_n$ vom arithmetischen Mittel T derselben, so ist

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 0;$$

der dem arithmetischen Mittel T entsprechende Fehler wird (wegen $t = 0$)

$$a = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n}.$$

Berechnet man für die Zeit T den Ort R, so ist $R + a$ der von den Beobachtungsfehlern möglichst befreite Ort; denn man kann voraussetzen, daß in der Summe $d_1 + d_2 + \cdot\cdot + d_n$ die in den Größen $d_1, d_2, \cdot\cdot d_n$ enthaltenen Beobachtungsfehler sich größtenteils aufheben. Diese Untersuchung macht man sowohl für die Rektaszension als auch für die Deklination; man erhält auf diese Art eine aus mehreren Orten abgeleitete Position, welche man einen Normalort nennt.

Bei den kleinen Planeten und Kometen können Beobachtungen, die einen Zeitraum von zehn bis dreißig Tagen umfassen, zu einem Normalort vereinigt werden. Für die erste Erscheinung (Opposition), wo die Beobachtungen selten einen Zeitraum von mehr als hundert Tagen umfassen, genügt es, aus denselben drei oder vier Normalorte mit möglichst nahe gleichen Zwischenzeiten zu bilden und aus denselben nach den in den ersten drei Abschnitten gegebenen Methoden die Bahn zu bestimmen.

85.

Ist ein Planet in zwei oder mehreren Oppositionen beobachtet worden, so sind die im ersten und dritten Abschnitte angegebenen Methoden nicht bequem anwendbar; allein in diesem Falle besitzt man aus der ersten Opposition bereits ziemlich genaue Elemente, und die nächsten Oppositionen werden dann hauptsächlich zur Verbesserung dieser Elemente benutzt.

Aus der ersten Opposition nehme man einen oder zwei möglichst entfernte Normalorte, aus jeder folgenden Opposition (da man in denselben den Planeten nicht so oft beobachtet) einen Normalort; nun bestimmt man die Bahn auf folgende Art:

Man wähle zwei möglichst genaue und hinreichend (um eine oder mehrere Oppositionen) entfernte Normalorte L, L'. Man kann nun die Elemente als Funktionen der (unbekannten) zu diesen beiden Normalorten zugehörigen Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde betrachten. Für die Orte L, L' rechne man aus den genäherten Elementen die Entfernungen D, D' von der Erde. Um die wahren Entfernungen zu bestimmen, bilde man die drei Hypothesen

I.	II.	III.
D	$D + d$	D
D'	D'	$D' + d'$,

wo d und d' kleine Änderungen sind, die bis auf 0.001 genommen werden dürfen. Man bestimme nun für diese drei Hypothesen der Entfernungen und der Orte L, L' drei Elementensysteme und berechne mit diesen die übrigen Normalorte. Es seien

I.	II.	III.
M,	$M + \alpha$,	$M + \beta$
M',	$M' + \alpha'$,	$M' + \beta'$
.	.	.

die berechneten Normalorte, wobei die einzelnen Längen und Breiten besonders bezeichnet gedacht werden. Die zugehörigen beobachteten Orte seien $N, N', ..$

Sind $D + x \cdot d$, $D' + y \cdot d'$ die wahren Entfernungen, so sind die damit berechneten Beobachtungen

$$M + \alpha x + \beta y\text{*)}$$
$$M' + \alpha' x + \beta' y$$
$$. \quad . \quad .$$

*) Ist nämlich α die Änderung einer von D und D' abhängigen Größe, welche der Änderung d von D entspricht, so entspricht der Änderung dx die Änderung αx. Analoges gilt für die Änderungen von D'. Der gleichzeitigen Änderung von D und D' entspricht die Summe der Änderungen. — Interpolation nach zwei Argumenten.

welche den Größen N, N', ... gleich sind. Man erhält daher Gleichungen von der Form

$$N - M = \alpha x + \beta y$$
$$N' - M' = \alpha' x + \beta' y$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Aus einem Normalort erhält man zwei solche Gleichungen; hat man mehrere Orte, so kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate [11]) die wahrscheinlichsten Werte von x, y bestimmen. Aus den verbesserten Distanzen oder durch Interpolation bestimme man die verbesserten Elemente; denn diese stellen sich ebenfalls in der Form dar

$$M + \alpha x + \beta y.$$

Diese Methode stellt die beiden Orte L und L' vollkommen, die übrigen, wenn mehrere sind, möglichst genau dar. Die Orte L, L' müssen möglichst fehlerfrei sein, weil deren Fehler in die Elementenbestimmung, also auch in die Darstellung der übrigen Orte übergehen.

Diese Methode setzt außerdem voraus, daß man die zweiten Potenzen von $x d$ und $y d'$ vernachlässigen kann. Erhält man für x und y Werte, die mehrere Einheiten betragen, so wiederhole man diese Rechnung, wobei man die durch die erste Rechnung erhaltenen Distanzen als erste Hypothese nimmt.

Statt der Entfernungen D, D' des Himmelskörpers von der Erde kann man sich auf ganz analogem Wege der Elemente ☊ und i bedienen. Die hierhergehörige Methode ergibt sich aus der Lösung der folgenden Aufgabe:

»Aus dem geozentrischen Orte und der Lage der Bahnebene, d. i. Knoten und Neigung, den heliozentrischen Ort zu bestimmen.«

Legt man die x-Achse in die Knotenlinie, so hat man die Gleichungen (indem man in den Gleichungen (7) des

Art. 11. statt l, L resp. $l - \Omega$, $L - \Omega$ setzt und die Formeln des Art. 10. berücksichtigt)

$$(1)\qquad r \cos u - R \cos(L - \Omega) = \Delta \cos\beta \cos(\lambda - \Omega)$$

$$(2)\qquad r \sin u \cos i - R \sin(L - \Omega) = \Delta \cos\beta \sin(\lambda - \Omega)$$

$$(3)\qquad r \sin u \sin i = \Delta \sin\beta.$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) und (2) die Größe R, so erhält man

$$(4)\qquad r \cos u \sin(L - \Omega) - r \sin u \cos i \cos(L - \Omega) = \Delta \cos\beta \sin(L - \lambda).$$

Durch Elimination von Δ aus den Gleichungen (3) und (4) folgt

$$(5)\qquad \operatorname{tang} u = \frac{\sin(L - \Omega)\sin\beta}{\cos i \cos(L - \Omega)\sin\beta + \sin i \sin(L - \lambda)\cos\beta}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt durch Elimination von Δ

$$(6)\qquad r = \frac{R \sin(L - \lambda)}{\sin u \cos i \cos(\lambda - \Omega) - \cos u \sin(\lambda - \Omega)}.$$

Ist β positiv, so liegt u zwischen 0° und 180°,
» » negativ, » » » » 180° » 360°.

Für $\beta = 0$ ist $u = 0$ oder 180° zu nehmen, sodaß r positiv wird.

Die Rechnung ist so wie im vorigen Falle, indem man statt der Größen D, D' die Elemente Ω, i setzt.

Zusatz 1. Bei einer parabolischen Bahn kann man die Elemente auch als Funktionen des Verhältnisses der kurtierten Entfernungen der Orte L und L' betrachten. Man rechnet nun aus zwei Annahmen dieses Verhältnisses — wovon die eine M aus den genäherten Elementen erhalten wird, die andere $M + m$ ist, wo m eine kleine Änderung ist, — Elemente.

Mit diesen beiden Elementensystemen vergleicht man die übrigen Beobachtungen und bestimmt dadurch das wahr-

scheinlichste Verhältnis $M + x \cdot m$, aus welchem (oder durch Interpolation) man die zugehörigen Elemente findet.

Zusatz 2. Bei ganz genauen Rechnungen kann man die Änderungen der berechneten Orte durch die Differentialformeln der Elemente darstellen und damit die Korrektionen der Elemente nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln.

Sechster Abschnitt.

Bahnbestimmung mit Berücksichtigung der Störungen.

36.

Die in den früheren Abschnitten dargestellten Bahnbestimmungen berücksichtigen nur die gegenseitige Anziehung der Sonne und des Himmelskörpers; dadurch erhält man als relative Bahn des Himmelskörpers um die Sonne einen Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkte sich die Sonne befindet. Vermöge der allgemeinen Anziehung weicht die wirkliche Bewegung der Himmelskörper von der unter der obigen Voraussetzung bestimmten Bewegung ab, welche Abweichung man unter dem Namen Störungen begreift.

Es soll nun die Bewegung eines Himmelskörpers, welcher der gestörte heißt, bestimmt werden, wenn außer der Sonne noch ein anderer störender Himmelskörper einwirkt (Problem der drei Körper).

Um die relative Bewegung des gestörten Himmelskörpers um die Sonne zu erhalten, bringe man die auf die Sonne wirkende Kraft im entgegengesetzten Sinne an Sonne und Himmelskörper an. Es seien nun, wenn k^2 die Masse der Sonne ist, deren Mittelpunkt als Koordinaten-Anfang gesetzt wird:

x, y, z, mk^2 die Koordinaten und Masse des gestörten
$x', y', z', m'k^2$ » » » » » störenden
Himmelskörpers, ϱ deren Distanz; dabei ist

$$\varrho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Zerlegt man die Einwirkungen in drei Komponenten nach den Koordinatenrichtungen, und nimmt die Kräfte positiv, wenn sie die Koordinaten des bewegten Punktes zu vergrößern, negativ, wenn sie dieselben zu verkleinern suchen, so sind für die x-Richtung

$-k^2\frac{x}{r^3}$, $+m'k^2\frac{x'-x}{\varrho^3}$ die auf den gestörten Himmelskörper

$+mk^2\frac{x}{r^3}$, $+m'k^2\frac{x'}{r'^3}$ » » die Sonne

wirkenden beschleunigenden Kräfte, also

$$-k^2(1+m)\frac{x}{r^3} + m'k^2\left(\frac{x'-x}{\varrho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right)$$

die in der x-Richtung wirkende Kraft, welche $+\frac{d^2x}{dt^2}$ ist.

Man erhält daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = m'k^2\left(\frac{x'-x}{\varrho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right), \text{ ebenso}$$

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = m'k^2\left(\frac{y'-y}{\varrho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = m'k^2\left(\frac{z'-z}{\varrho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right).$$

Sind mehrere störende Himmelskörper vorhanden, so bleiben die linken Teile dieser Gleichungen ungeändert; rechts erhält man für jeden störenden Himmelskörper ein ähnliches Glied, deren Summe die in dieser Achsenrichtung wirkende störende Kraft ist.

Aus den Gleichungen (1) hat man x, y, z als Funktionen der Zeit t zu bestimmen. Die direkte Lösung überschreitet die Kräfte der gegenwärtigen Analysis, man ist daher gezwungen die Aufgabe successive durch Reihen-

entwicklungen zu lösen. Man kann entweder unmittelbar die heliozentrischen Koordinaten durch die Zeit ausdrücken, d. i. die Störungen der Koordinaten entwickeln, oder die Aufgabe auch dadurch lösen, daß man die Voraussetzung macht: die Bewegung des gestörten Himmelskörpers geschieht in einem Kegelschnitt, dessen Elemente veränderlich sind, in welchem jedoch der Ort und die Geschwindigkeit des Himmelskörpers zur Zeit t nach den Regeln der Bewegung im Kegelschnitte mit den zur Zeit t geltenden Elementen bestimmt wird (Methode der Variation der Konstanten). Statt der Reihenentwicklungen bedient man sich gegenwärtig bei den kleinen Planeten und Kometen meist des Verfahrens der Berechnung der speziellen Störungen durch die mechanischen Quadraturen. Zu diesem Ende teilt man das Zeitintervall, für welches die Störungen zu bestimmen sind, in eine Anzahl gleicher Teile; für den Anfang T des Zeitintervalles seien die oskulierenden Elemente, d. h. die Elemente, aus welchen für die Zeit T der berechnete Ort und die Geschwindigkeit des Himmelskörpers mit dem wirklichen Orte und der wirklichen Geschwindigkeit übereinstimmt, gegeben. Man bestimmt nun aus den störenden Kräften für die einzelnen Teile des Zeitintervalles die Geschwindigkeiten der Elemente und leitet aus diesen durch die mechanische Quadratur die zugehörigen Elemente ab.

Kürzer ist die Rechnung, wenn man statt der Störungen der Elemente die Störungen der Koordinaten bestimmt. Letztere Methode wurde zuerst von Bond in Cambridge und unabhängig von Encke in Berlin angegeben; von letzterem jedoch in einer für die Anwendung höchst bequemen Form, weshalb die Methode gegenwärtig die Enckesche Methode heißt.

87.

Es seien zur Zeit t: x, y, z die wahren (gestörten) Koordinaten, x_0, y_0, z_0 die für dieselbe Zeit mit den zur Zeit T oskulierenden Elementen gerechneten Koordinaten; setzt man

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta,$$

so kann man die Störungen ξ, η, ζ auf folgende Art bestimmen.

Es ist, wenn man die gegenseitige Einwirkung der Sonne und des gestörten Himmelskörpers allein berücksichtigt:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x_0}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x_0}{r_0^3} = 0 \\ (2) \qquad &\frac{d^2 y_0}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y_0}{r_0^3} = 0 \\ &\frac{d^2 z_0}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z_0}{r_0^3} = 0. \end{aligned}$$

Subtrahiert man von den Gleichungen (1) die Gleichungen (2), so erhält man

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m' k^2\left(\frac{x'-x}{\varrho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + (1+m)k^2\left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right),$$

und analog für die übrigen Gleichungen.

Um $\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}$ bequemer zu berechnen, setze man es

$$= \frac{1}{r_0^3}\left(x_0 + \xi - \xi - x\frac{r_0^3}{r^3}\right) = \frac{1}{r_0^3}\left(\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)x - \xi\right).$$

Nun ist $\quad r^2 = (x_0+\xi)^2 + (y_0+\eta)^2 + (z_0+\zeta)^2 \quad$ oder

$$r^2 = r_0^2 + 2x_0\xi + 2y_0\eta + 2z_0\zeta + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + 2\,\frac{(x_0+\frac{1}{2}\xi)\xi + (y_0+\frac{1}{2}\eta)\eta + (z_0+\frac{1}{2}\zeta)\zeta}{r_0^2}$$

$$= 1 + 2q,$$

wo $\quad q = \frac{x_0+\frac{1}{2}\xi}{r_0^2}\xi + \frac{y_0+\frac{1}{2}\eta}{r_0^2}\eta + \frac{z_0+\frac{1}{2}\zeta}{r_0^2}\zeta \quad$ ist.

Aus $\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + 2q$ folgt $\frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}$, oder

$$\frac{r_0^3}{r^3} = 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \cdot\cdot$$

$$= 1 - 3q\left(1 - \tfrac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \cdot\cdot\right).$$

Setzt man

$$f = 3\left(1 - \tfrac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \cdot\cdot\right),$$

so wird $\quad 1 - \frac{r_0^3}{r^3} = fq$, und daraus folgt

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}(fqx - \xi).$$

Mithin ist

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{x' - x}{\varrho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + (1 + m)\frac{k^2}{r_0^3}(fqx - \xi),$$

ebenso

$$(3) \qquad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{y' - y}{\varrho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) + (1 + m)\frac{k^2}{r_0^3}(fqy - \eta)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{z' - z}{\varrho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) + (1 + m)\frac{k^2}{r_0^3}(fqz - \zeta).$$

88.

Aus den Gleichungen (3) erhält man durch die mechanische Quadratur die Größen ξ, η, ζ. Zu diesem Ende mögen zunächst die hierzu nötigen Formeln entwickelt werden.

I. Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion von x. In der Reihe der Werte

$$f(a), \; f(a + w), \; f(a + 2w), \ldots \; f(a + nw), \ldots$$

läßt sich jede der drei Zahlen $f(a + \overline{n - 1} \cdot w)$, $f(a + nw)$, $f(a + \overline{n + 1} \cdot w)$ genau darstellen durch die Formel

$$f(x) = \alpha + \beta \frac{v}{w} + \gamma \left(\frac{v}{w}\right)^2,$$

indem man $x = a + nw + v$ setzt.

Denn setzt man $v = -w,\ 0,\ +w$, so wird

$$f(a + \overline{n-1}\cdot w) = \alpha - \beta + \gamma$$
$$f(a + nw) \qquad = \alpha$$
$$f(a + \overline{n+1}\cdot w) = \alpha + \beta + \gamma,$$

daraus folgt

$$\alpha = f(a + nw)$$
$$2\beta = f(a+nw) - f(a + \overline{n-1}\cdot w) + f(a + \overline{n+1}\cdot w) - f(a+nw)$$
$$2\gamma = f(a + \overline{n+1}\cdot w) - f(a+nw) - (f(a+nw) + f(a + \overline{n-1}\cdot w)).$$

Bequemer werden die Ausdrücke, wenn man die Differenzen der Funktionswerte einführt. Setzt man

$$f(a + \overline{n+1}\cdot w) - f(a+nw) = f'(a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w)$$
$$f'(a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w) - f'(a + \overline{n-\tfrac{1}{2}}\cdot w) = f''(a+nw) \text{ u.s.w.},$$

so wird

$$2\beta = f'(a + \overline{n-\tfrac{1}{2}}\cdot w) + f'(a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w)$$
$$2\gamma = f''(a+nw).$$

Es ist daher für $x = a + nw + v$

$$f(x) = f(a+nw) + \tfrac{1}{2}(f'(a + \overline{n-\tfrac{1}{2}}\cdot w) + f'(a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w))\frac{v}{w} + \tfrac{1}{2}f''(a+nw)\left(\frac{v}{w}\right)^2,$$

welche Formel für $v = -w$, 0 und $+w$ vollkommen richtig ist.

Allein auch für jeden, zwischen $a + \overline{n-\tfrac{1}{2}}\cdot w$ und $a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w$ liegenden Wert von x läßt sich $f(x)$ durch diese Formel mit großer Genauigkeit darstellen, wenn die Werte $f(a)$, $f(a+w)$, .. $f(a+nw)$ näherungsweise als Glieder einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung betrachtet werden können.

II. Es sei nun das Integral $\int f(x)\,dx$ zwischen den Grenzen $a + \tfrac{1}{2}w$ und $a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w$ zu finden.

Es ist das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\alpha + \beta\frac{v}{w} + \gamma\left(\frac{v}{w}\right)^2\right) dv =$$

$$w\left(\alpha\frac{v}{w} + \tfrac{1}{2}\beta\left(\frac{v}{w}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\gamma\left(\frac{v}{w}\right)^3\right),$$

also innerhalb der Grenzen $\frac{v}{w} = -\frac{1}{2}$ bis $\frac{v}{w} = +\frac{1}{2}$, d. h.

von $x = a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w$ bis $x = a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w$

$$\int_{a+\overline{n-\frac{1}{2}}\cdot w}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\cdot w} f(x)\,dx = w(\alpha + \tfrac{1}{12}\gamma)$$

$$= w(f(a+nw) + \tfrac{1}{24}f''(a+nw)).$$

Setzt man in dieser Gleichung $n = 1, 2, 3, \ldots n$, und addiert die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$\int_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\cdot w} f(x)\,dx = w\{f(a+w) + f(a+2w) + \cdots + f(a+nw)$$

$$+ \tfrac{1}{24}(f''(a+w) + f''(a+2w) + \cdots + f''(a+nw))\}.$$

Führt man die Summenreihen ein und bezeichnet die Glieder der ersten Summenreihe, von welcher

$$f(a),\ f(a+w),\ \ldots$$

die Differenzen sind, mit $'f$, die Glieder der zweiten Summenreihe mit $''f, \ldots$, so ist konsequent mit der früheren Bezeichnung

$$'f(a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w) - {}'f(a + \overline{n-\tfrac{1}{2}}\cdot w) = f(a+nw).$$

Setzt man in dieser Gleichung $n = 1, 2, \ldots n$ und addiert die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$'f(a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w) - {}'f(a + \tfrac{1}{2}\cdot w) = f(a+w)$$

$$+ f(a+2w) + \cdots + f(a+nw);$$

ebenso ist

$$f'(a + \overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w) - f'(a + \tfrac{1}{2}\cdot w) = f''(a+w)$$

$$+ f''(a+2w) + \cdots + f''(a+nw).$$

Es ist daher

$$(1)\quad \int\limits_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\cdot w} f(x)\,dx = w\,({}'f(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w) + \tfrac{1}{24}f'(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w)$$
$$-{}'f(a+\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{1}{24}f'(a+\tfrac{1}{2}w)).$$

Das Anfangsglied einer summierten Reihe ist willkürlich; betrachtet man ${}'f(a+\frac{1}{2}w)$ als Anfangsglied der ersten Summenreihe, so ist es am bequemsten, dasselbe so zu bestimmen, daß

$${}'f(a+\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{24}f'(a+\tfrac{1}{2}w) = 0 \text{ wird,}$$

also $${}'f(a+\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24}f'(a+\tfrac{1}{2}w)$$

wird; in diesem Falle erhält man

$$(2)\quad \int\limits_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\cdot w} f(x)\,dx = w\,({}'f(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w) + \tfrac{1}{24}f'(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w)).$$

III. Bezeichnet man den Wert des gefundenen Integrals mit $F(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\cdot w)$, so werden aus der Reihe der Funktionswerte

$$\ldots f(a-w),\ f(a),\ f(a+w),\ f(a+2w),\ldots f(a+nw),\ldots$$

und den zugehörigen Differenzen nach der Formel (2) die Integrale

$$\ldots F(a-\tfrac{1}{2}w),\ F(a+\tfrac{1}{2}w),\ F(a+\tfrac{3}{2}w),\ldots F(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\cdot w)\ldots$$

bekannt. Aus diesen Werten erhält man wieder

$$\iint\limits_{a}^{a+\overline{n+1}\cdot w} f(x)\,dx^2 = \int\limits_{a}^{a+\overline{n+1}\cdot w} F(x)\,dx.$$

Nach Gleichung (1) gibt $w\,{}'f(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\cdot w)$ integriert:

$$w^2({}''f(a+\overline{n+1}\cdot w + \tfrac{1}{24}f(a+\overline{n+1}\cdot w)$$
$$-{}''f(a) - \tfrac{1}{24}f(a));$$

$\frac{w}{24}f'(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\cdot w)$ gibt integriert: $\frac{w^2}{24}(f(a+\overline{n+1}\cdot w) - f(a))$,

also

$$(3)\quad \iint\limits_{a}^{a+\overline{n+1}\cdot w} f(x)\,dx^2 = w^2\left({}''f(a+\overline{n+1}\cdot w)+\tfrac{1}{12}f(a+\overline{n+1}\cdot w)\right.$$
$$\left.-{}''f(a)-\tfrac{1}{12}f(a)\right).$$

Die Formeln (1) und (3) gelten auch, wenn n gebrochen ist, d. h. in dem Sinne, daß es gleichgültig ist, ob man sich aus den für ganze n erhaltenen Integralen den Wert des Integrals für ein gebrochenes n interpoliert, oder die für letzteres n interpolierten Glieder der Summenreihen benutzt.

Subtrahiert man von dem Integral in (3) das Integral

$$\iint\limits_{a}^{a+\frac{1}{2}w} f(x)\,dx^2,$$

so erhält man

$$\iint\limits_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\overline{n+1}\cdot w} f(x)\,dx^2 = w^2\left({}''f(a+\overline{n+1}\cdot w)+\tfrac{1}{12}f(a+\overline{n+1}\cdot w)\right.$$
$$\left.-{}''f(a+\tfrac{1}{2}\cdot w)-\tfrac{1}{12}f(a+\tfrac{1}{2}\cdot w)\right).$$

Die Glieder ${}''f(a+\frac{1}{2}w)$, $f(a+\frac{1}{2}w)$ müssen durch Interpolation bestimmt werden. Es ist für die Interpolation in die Mitte

$${}''f(a+\tfrac{1}{2}w)={}''f(a)+\tfrac{1}{2}{}'f(a+\tfrac{1}{2}w)-\tfrac{1}{8}f(a+w)+\tfrac{1}{16}f'(a+\tfrac{3}{2}w)$$
$$f(a+\tfrac{1}{2}w)=f(a)+\tfrac{1}{2}f'(a+\tfrac{1}{2}w)-\cdots$$

Für den Beginn der ersten Summenreihe wurde

$${}'f(a+\tfrac{1}{2}w)=-\tfrac{1}{24}f'(a+\tfrac{1}{2}w)$$

gesetzt. Führt man diese Werte ein, so erhält man

$$\iint\limits_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\overline{n+1}\cdot w} f(x)\,dx^2 = w^2\left({}''f(a+\overline{n+1}\cdot w)+\tfrac{1}{12}f(a+\overline{n+1}\cdot w)\right.$$
$$\left.-{}''f(a)+\tfrac{1}{24}f(a+w)\right).$$

Bestimmt man das willkürliche Anfangsglied der zweiten Summenreihe dergestalt, daß

$-{}''f(a)+\frac{1}{24}f(a+w)=0$, also $''f(a)=\frac{1}{24}f(a+w)$ ist; so wird

$$(4)\quad \int\!\!\int_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\overline{n+1}\cdot w} f(x)dx^2 = w^2({}''f(a+\overline{n+1}\cdot w)+\tfrac{1}{12}f(a+\overline{n+1}\cdot w)).$$

Das Hauptglied der Formel (4), nämlich

$$w^2\,{}''f(a+\overline{n+1}\cdot w),$$

ist aus den Werten der ursprünglichen Reihe $f(a)$, $f(a+w)$, $\cdot\cdot f(a+nw)$ bekannt; dieses Glied ist bereits ein Näherungswert des zweiten Integrals. Aus dem Gange der ursprünglichen Reihe bis zum Gliede $f(a+nw)$ läßt sich auch ein Schluß auf $f(a+\overline{n+1}\cdot w)$ machen, also das Integral (wenn $f(a+\overline{n+1}\cdot w)$ nicht mehr gegeben ist) mit großer Genauigkeit erhalten, da ein Fehler in der Annahme des letzteren Gliedes durch den Factor $\frac{1}{12}$ noch sehr vermindert wird.[12])

39.

Um nun die Störungen ξ, η, ζ zu erhalten, setze man den Anfang derselben auf den Oskulationspunkt, und bezeichne diesen mit $a+\frac{1}{2}w$. Man rechne nun nach den Gleichungen (3) des Art. 37. für die Zeiten a und $a+w$ die Werte von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, .., indem man in den rechten Teilen dieser Gleichungen $\xi=\eta=\zeta=0$ setzt. Bezeichnet man $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ mit $f(a+nw)$, so erhält man dadurch $f(a)$, $f(a+w)$ und damit $f'(a+\frac{1}{2}w)$. Nun erhält man Werte für $'f(a+\frac{1}{2}w)$, $''f(a)$ und mit diesen kann man durch Fortsetzung der Summenreihen die Werte von ξ für $t=a$ und $t=a+w$ erhalten.

Genau auf demselben Wege erhält man für die Zeiten $t=a$ und $t=a+w$ genäherte Werte von η und ζ.

Nun berechne man mit den genäherten Werten von ξ, η, ζ neuerdings ihre zweiten Differentialquotienten nach den Formeln (3) des Art. 37., wodurch man dann genauere Werte für ξ, η, ζ erhält. Die Rechnung wird so oft wiederholt, bis man keine verschiedenen Werte erhält. Die Fortsetzung für die weiteren Argumente hat nach dem Obigen keine Schwierigkeit.

Beispiel. Für den Planeten Asia sind die Störungen, welche derselbe von 1868 Januar 22 an durch den Planeten Jupiter erleidet, zu bestimmen.

Es werde $w = 20$ Tage, $m' = \frac{1}{1047.88}$ und $m = 0$ gesetzt.

Für die Rechnung ist es bequemer, gleich $w^2 f(a + nw)$ zu berechnen. Es ist in Einheiten der siebenten Decimale $\log(w^2 m' k^2) = 3.05291 = \log m_0'$.

Mit den zur Zeit 1868 Jan. 22 oskulierenden Elementen des Planeten Asia erhält man

1868	Arg.	x_0	y_0	z_0	$\log r_0$
Jan. 12	a	$-$ 2.5620	+ 1.0545	$-$ 0.2063	0.4438
Febr. 1	$a + w$	2.6077	0.8693	0.1902	0.4402
- 21	$a + 2w$	2.6387	0.6791	0.1731	0.4362
März 12	$a + 3w$	$-$ 2.6543	+ 0.4850	$-$ 0.1549	0.4318.

Für den Planeten Jupiter hat man für dieselben Zeiten

x'.	y'	z'	$-m_0' \frac{x'}{r'^3}$	$-m_0' \frac{y'}{r'^3}$	$-m_0' \frac{z'}{r'^3}$
+ 4.8100	$-$ 1.2759	$-$ 0.1041	$-$ 44.06	+ 11.69	+ 0.95
4.8448	1.1222	0.1054	44.44	10.30	0.97
4.8748	0.9673	0.1067	44.83	8.89	0.98
+ 4.9001	$-$ 0.8116	$-$ 0.1078	$-$ 45.14	+ 7.48	+ 0.99.

Damit erhält man, indem man für Jan. 12 und Febr. 1 zunächst $\xi, \eta, \zeta = 0$ setzt, folgende genäherte Werte:

Arg.	$\log \varrho$	$w^2 \frac{d^2 \xi}{d t^2}$	$w^2 \frac{d^2 \eta}{d t^2}$	$w^2 \frac{d^2 \zeta}{d t^2}$
a	0.8883	— 26.04	+ 5.99	+ 1.20
$a + w$	0.8873	— 26.10	+ 5.40	+ 1.18,

aus welchen Werten durch Bildung der Summen und Differenzen nach (4) des Art. 38 erhalten werden

Arg.	ξ	η	ζ
a	— 3.3	+ 0.7	+ 0.2
$a + w$	— 3.3	+ 0.8	+ 0.2.

Mit diesen Werten rechne man neuerdings die Ausdrücke $w^2 \frac{d^2 \xi}{d t^2} \cdots$, wodurch man die verbesserten Werte

Arg.	$w^2 \frac{d^2 \xi}{d t^2}$	$w^2 \frac{d^2 \eta}{d t^2}$	$w^2 \frac{d^2 \zeta}{d t^2}$
a	— 26.07	+ 6.00	+ 1.21
$a + w$	— 26.13	+ 5.41	+ 1.19

erhält, welche von den vorigen beinahe nicht verschieden sind. Aus diesen konstruiert man sich folgende Tafel

Arg.	$''f$	$'f$	f	f'
		für ξ		
a	— 1.09		— 26.07	
		0.00		— 0,06
$a + w$	— 1.09		— 26.13	
		— 26.13		
$a + 2w$	— 27.22			
		für η		
a	+ 0.25		+ 6.00	
		+ 0.02		— 0.59
$a + w$	0.27		+ 5.41	
		+ 5.43		
$a + 2w$	+ 5.70			

Arg.	$''f$	$'f$	f	f'
		für ζ		
a	$+0.05$		$+1.21$	
		0.00		-0.02
$a+w$	$+0.05$		$+1.19$	
		$+1.19$		
$a+2w$	$+1.24.$			

Aus diesen Angaben ersieht man unmittelbar, daß $f(a+2w)$ für ξ, η, ζ resp. von -26.2, $+4.8$, $+1.2$ (indem man die ersten Differenzen anbringt) nicht sehr verschieden sein werden, woraus durch Anwendung der Formel (4) des Art. 38. für $a+2w$ folgt

$$\xi = -29.4, \quad \eta = +6.1, \quad \zeta = +1.3.$$

Damit erhält man

$$\log \varrho = 0.8860, \quad w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = -26.52, \quad w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2} = +4.89,$$

$$w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2} = +1.11,$$

welche Werte von den obigen so wenig verschieden sind, daß eine Wiederholung der Rechnung überflüssig ist. Durch Fortsetzung der ersten und zweiten Summenreihe erhält man

Arg.	$''f$	$'f$	f	f'
		für ξ		
				-0.39
$a+2w$	-27.22		-26.52	
		-52.65		
$a+3w$	-79.87			
		für η		
				-0.52
$a+2w$	$+5.70$		$+4.89$	
		$+10.32$		
$a+3w$	$+16.02$			
		für ζ		
				-0.08
$a+2w$	$+1.24$		$+1.11$	
		$+2.30$		
$a+3w$	$+3.54.$			

Man sieht nun, daß $'f(a+3w)$ für ξ, η, ζ resp. von

$$-27.2, \quad +4.4, \quad +1.0$$

nicht sehr verschieden sein kann: denn aus dem Gange der Differenzen f' ersieht man, daß $f(a+3w)-f(a+2w)$ für ξ, η, ζ ungefähr resp.

$$-0.7, \quad -0.5, \quad -0.1$$

sein dürfte. Damit erhält man für $a+3w$

$$\xi = -82.2, \quad \eta = +16.4, \quad \zeta = +3.6,$$

mit welchen Werten

$$\log \varrho = 0.8845, \quad w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = -27.18, \quad w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2} = +4.40,$$

$$w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2} = +1.00$$

erhalten wird. Auf diese Art wird die Rechnung fortgesetzt.

Nach denselben Regeln werden die Störungen von $a+\frac{1}{2}w$ an zurück für die Argumente

$$a, \; a-w, \quad a-2w, \ldots \quad \text{bestimmt.}$$

40.

Berücksichtigt man nur die Störungen erster Ordnung, so kann man

$$q = \frac{x_0}{r_0^2}\,\xi + \frac{y_0}{r_0^2}\,\eta + \frac{z_0}{r_0^2}\,\zeta, \quad f = 3$$

und $$\frac{x'-x}{\varrho^3} = \frac{x'-x_0}{\varrho_0^3}, \ldots \quad \text{setzen.}$$

Allein die Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung ist mit nicht viel mehr Arbeit verbunden, da man in $x_0 + \frac{1}{2}\xi, \ldots x' - x, \ldots$ und ϱ nur die genäherten Werte von ξ, η, ζ einzuführen hat. Den genauen Wert von $\log f$ erhält man aus der Tafel XXVI von Bauschinger.

41.

Bei der Berechnung der speziellen Störungen nach der angegebenen Methode wurde die Voraussetzung

gemacht, daß für den Anfang der Störungen die oskulierenden Elemente bekannt sind. Allein diese Elemente setzen die Kenntnis der Störungen voraus; man kann daher die oskulierenden Elemente und die zugehörigen Störungen nur durch abwechselnd wiederholte Verbesserungen bestimmen.

Man betrachtet die nach den vorigen Abschnitten aus den Beobachtungen erhaltenen Elemente als oskulierend für eine gewisse Zeit T, am besten für die Mitte des Zeitraumes, den die Beobachtungen, aus welchen die Elemente erhalten wurden, umfassen.

Mit diesen Elementen rechne man für die Beobachtungen die Störungen der Koordinaten und aus diesen die Störungen des geozentrischen Ortes (Länge und Breite). Man findet die Störung des geozentrischen Ortes, indem man denselben zuerst mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 und dann mit den Koordinaten $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$ rechnet; der Unterschied der beiden Orte ist die Störung des geozentrischen Ortes.

Nun befreie man die Beobachtungen von den Störungen und rechne aus diesen von den Störungen befreiten Orten neue Elemente. Mit diesen wiederholt man die Störungsrechnungen und die Berechnung neuer Elemente so oft, bis kein Unterschied stattfindet. In der Regel genügt eine Wiederholung der Berechnung der Störungen und der oskulierenden Elemente.

Dritter Teil.

Geschichte der Planetentheorien.

Einleitung.

42.

Der Unterschied zwischen Fixsternen und Planeten war schon in frühester Zeit bekannt: Fixsterne nannte man diejenigen Himmelskörper, welche ihre gegenseitige Stellung am Himmel nicht verändern, während man Planeten, d. i. irrende Sterne, diejenigen nannte, welche ihre Stellung am Himmel verändern. Im Altertum zählte man sieben Planeten: Sonne, Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Durch die fortgesetzte Bestimmung der Orte eines Planeten auf der Himmelskugel kann man ein Bild seines Laufes erhalten. Die Beobachtungen lehren, daß sowohl dieser Lauf als auch die einzelnen Vorgänge desselben höchst verwickelter Natur sind.

Man hatte bereits im Altertum erkannt, daß die Unregelmäßigkeiten im Planetenlauf von zweierlei Natur sind, welche man daher mit den Namen der ersten und zweiten Ungleichheit bezeichnete. Der erste Versuch einer Erklärung dieser Erscheinungen geschah auf Grundlage der Ideen der griechischen Naturphilosophie. Nach diesen galt die Kugel als der vollkommenste Körper, die Kreislinie als die vollkommenste Linie. Man dachte sich daher die Welt als eine Kugel, in deren Mittelpunkte sich der Mittel-

punkt der ruhenden Erde befindet, und suchte die Bewegung der Planeten durch die Zusammensetzung gleichförmiger Bewegungen in Kreisen darzustellen, ohne daß man sich um die physischen Ursachen derselben kümmerte, höchstens an die Stelle von Kräften die festen Sphären oder Firmamente setzte.

Um in Kürze das Wesen dieser beiden Ungleichheiten zu bezeichnen, mag hier nur an die elliptische Bewegung der Planeten um die Sonne erinnert werden. Die Unterschiede, welche dadurch entstehen, daß die Bewegung der Planeten nicht in Kreisen, sondern in Ellipsen geschieht, bildeten die erste Ungleichheit. Die zweite Ungleichheit hat darin ihren Grund, daß wir die Beobachtungen der Gestirne auf der Erde, welche sich selbst um die Sonne bewegt, anstellen. Alle die jetzt als scheinbar erkannten Ortsveränderungen der Planeten, welche durch die jährliche Bewegung der Erde entstehen und welche sich hauptsächlich in den Stillständen und rückläufigen Bewegungen äußern, bildeten die zweite Ungleichheit. Die erste Ungleichheit äußert sich wieder in den Unregelmäßigkeiten der zweiten Ungleichheit; z. B. in der Verschiedenheit der Zeiten zwischen den Konjunktionen und Oppositionen, Größe des Bogens der rückläufigen Bewegung, u. s. w.

Unvermischt mit der zweiten Ungleichheit zeigt sich die erste in der Bewegung der Sonne und des Mondes um die Erde, bei letzterem hatte jedoch bereits Ptolemäus (wegen der bedeutenden Störungen durch die Sonne) eine dritte Ungleichheit, die Evektion, hinzugefügt.

Erster Abschnitt.

Ältere Theorien.

43.

Die Notwendigkeit einer Erklärung und Darstellung der Planetenbewegungen wurde bereits von Plato betont. Sein Schüler Eudoxus von Cnidus (geb. 408, gest. um 355 v. Chr.*) löste diese Aufgabe, soweit sie sich auf die zweite Ungleichheit bezog, durch die homozentrischen Sphären. Jeder Himmelskörper ist in dem Äquator einer Sphäre, welche um ihre Pole rotiert, befestigt; die Pole dieser Sphäre werden von einer zweiten, ebenfalls um ihre Pole rotierenden Sphäre getragen, u. s. w. Durch passende Wahl der Stellung der Pole und der Rotationsgeschwindigkeiten konnten die Bewegungen im großen und ganzen dargestellt werden, wenn für Sonne und Mond je drei Sphären, für jeden Planeten vier Sphären angenommen wurden. Durch diese Theorie wurden die Längen von Jupiter und Saturn und teilweise von Merkur ziemlich gut dargestellt; weniger war dies bei Venus, am schlechtesten bei Mars der Fall; für die Breiten genügte jedoch diese Theorie. Eine Reform derselben wurde von Calippus durch Vermehrung der Sphären der einzelnen Planeten bewerkstelligt. [13])

Die erste auch für die Berechnung der Planetenörter anwendbare Theorie wurde von den Alexandriner

---

*) Eudoxus, durch den Spartaner Argesilaus an den ägyptischen König Nectanabis empfohlen, wurde von Chonuphis (Priester von Heliopolis) in die Geheimnisse der ägyptischen Wissenschaften eingeweiht, wobei er auch Daten über die Zeitdauer der Bewegungsmomente (Dauer der Rückläufe u. s. w.) erhielt. Nach den Zeugnissen der Alten stand Eudoxus in dem Rufe eines bedeutenden Geometers, dessen Arbeiten zum großen Teile bei der Zusammenstellung der Elemente durch Euklid aufgenommen wurden.

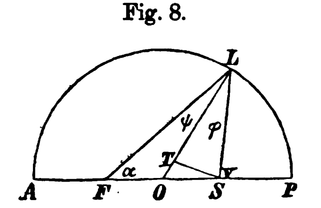
Astronomen, deren berühmteste Vertreter Hipparch (um 130 v. Chr.) und Claudius Ptolemäus (um 150 n. Chr.) waren, aufgestellt. In des letzteren Almagest, einer Sammlung mathematischer und astronomischer Schriften, ist diese Theorie streng geometrisch durchgeführt.

Die erwähnten Astronomen bedienten sich zur Darstellung des Planetenlaufes zweier Hilfsmittel: des exzentrischen Kreises für die erste Ungleichheit, des Epicykels für die zweite Ungleichheit. Es soll daher hier die Theorie dieser beiden Hilfsmittel gegeben werden.

I. Exzentrischer Kreis.

Es sei (Fig. 8) O der Mittelpunkt des exzentrischen Kreises, a dessen Radius. Der Punkt S im Inneren des exzentrischen Kreises sei der Mittelpunkt der Welt, in dem durch die beiden Punkte S und O bestimmten Durchmesser AP (der Apsidenlinie des exzentrischen Kreises) habe der Punkt F die Eigenschaft, daß von demselben aus die Bewegung eines Punktes L im Umfang des exzentrischen Kreises gleichförmig erscheint, sodaß die vom Punkte F nach L gezogenen Geraden in gleichen Zeiten gleiche Winkel bilden. Diese Geraden schneiden daher einen aus dem Punkte F als Mittelpunkt mit dem Radius $= a$ beschriebenen Kreis in gleichen Bogen. Dieser Kreis heißt der Äquant, der Punkt F der Ausgleichspunkt oder das *punctum aequans*.

Fig. 8.



Der Winkel $PSL = v$, welchen die Gerade SL mit der Apsidienlinie bildet, heißt die wahre Anomalie, der Winkel $PFL = \alpha$, welchen die Gerade FL mit der Apsiden-

linie bildet, heißt die **mittlere Anomalie** des exzentrischen Kreises; beide Winkel werden im Sinne der Bewegung von 0 bis 360° gezählt*).

Ist $OS = ae$, $FO = ae'$, also $FS = a(e + e')$, so heißt e die Exzentrizität des exzentrischen Kreises, e' die Exzentrizität des Äquanten, $e + e'$ die **ganze** Exzentrizität.

Der Winkel $OLS = \varphi$ heißt die **optische** Gleichung
» » $FLO = \psi$ » » **physische** » .

Die Summe $\varphi + \psi = FLS = v - \alpha$ heißt die **Mittelpunktsgleichung.**

Sind die Elemente a, e, e' gegeben, so kann man für die mittlere Anomalie α den wahren Ort des Punktes L berechnen.

Denn aus dem Dreiecke FLO erhält man, aus

$$\sin\psi = e' \sin\alpha,$$

den Winkel ψ.

Aus dem Dreiecke OLS erhält man, da Winkel $SOL = \psi + \alpha$ ist, den Winkel φ und die Distanz $SL = r$.

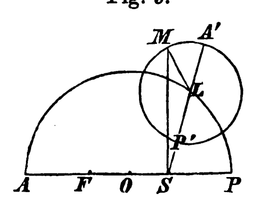
Aus φ, ψ und α folgt: $v = \alpha + \varphi + \psi$.

Umgekehrt kann man aus v und r die mittlere Anomalie α bestimmen.

II. **Epicykel.**

Um den Punkt L (Fig. 9) als Mittelpunkt beschreibt im ptolemäischen System der Planet M einen Kreis, dieser Kreis heißt der **Epicykel.** Die vom Punkte S nach dem Mittelpunkte L des Epicykels gezogene Gerade bestimmt den Durchmeser $A'P'$, d. i. die **wahre**

Fig. 9.



*) Ursprünglich, etwa bis **Euler**, zählte man die Anomalien vom Punkte A (Apogeum, Aphel), hier sollen die Anomalien immer vom Punkte P (Perigeum, Perihel) gezählt werden.

Apsidenlinie des Epicykels. Ein darauf senkrechter Durchmesser wird der mittlere Durchmesser genannt.

Der Punkt A' heißt das wahre Apogeum des Epicykels.

» » P' » » » Perigeum » »

In Verbindung mit dem Epicykel wird der exzentrische Kreis deferierender Kreis genannt.

Einem im Punkte S befindlichen Auge erscheint (bei ruhendem Punkte L) die Bewegung des Punktes M im oberen Teile des Epicykels rechtläufig, im unteren rückläufig.

44.

Um die Genauigkeit zu prüfen, mit welcher die erste Ungleichheit dargestellt werden kann, möge die Entwicklung der Größen r und v sowohl für die Ellipse als für den exzentrischen Kreis in Reihen nach Potenzen der Exzentrizität gegeben werden.

Hilfssätze.

1) Ist b klein, so folgt aus

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b \sin u}{1 - b \cos u}$$

$$\varphi = b \sin u + \tfrac{1}{2} b^2 \sin 2u + \cdots$$

2) Ist

$$\operatorname{tang} x = a \operatorname{tang} y,$$

wo a nahe $= 1$ ist, so folgt

$$\operatorname{tang}(x - y) = \frac{(a-1)\operatorname{tang} y}{1 + a \operatorname{tang} y^2} = \frac{2(a-1)\sin y \cos y}{2\cos y^2 + 2a \sin y^2}$$

oder

$$\operatorname{tang}(x-y) = \frac{\frac{a-1}{a+1}\sin 2y}{1 - \frac{a-1}{a+1}\cos 2y},$$

also

$$x = y + \frac{a-1}{a+1}\sin 2y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 \sin 4y + \cdots$$

3) Ist h sehr klein, so ist

$$\sin(x+h) = \sin x + \cos x \cdot h$$
$$\cos(x+h) = \cos x - \sin x \cdot h,$$

indem man $\cos h = 1$, $\sin h = h$ setzt.

I. Bezeichnet man für die Ellipse die mittlere Anomalie ebenfalls mit α, so ist nach Art. 2.

$$E = \alpha + e \sin E,$$

also bis auf einen Fehler zweiter Potenz von e

$$E = \alpha + e \sin \alpha,$$

und bis auf einen Fehler dritter Potenz von e

$$E = \alpha + e \sin(\alpha + e \sin \alpha),$$

oder nach 3)

$$E = \alpha + e \sin \alpha + \tfrac{1}{2} e^2 \sin 2\alpha.$$

Aus $\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{E}{2}$ folgt nach 2)

$$\frac{v}{2} = \frac{E}{2} + b \sin E + \tfrac{1}{2} b^2 \sin 2E + \cdots,$$

wo $b = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{1}{2} e + \frac{1}{8} e^3 + \cdots$ ist.

Substituiert man statt E den obigen Wert, so erhält man bis auf einen Fehler dritter Potenz von e

(1) $$v = \alpha + 2e \sin \alpha + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2\alpha.$$

Aus $\frac{r}{a} = 1 - e \cos E$ folgt, wegen

$$\cos E = \cos(\alpha + e \sin \alpha) = \cos \alpha - e \sin \alpha^2,$$

(2) $$\frac{r}{a} = 1 - e \cos \alpha + e^2 \sin \alpha^2$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} e^2 - e \cos \alpha - \tfrac{1}{2} e^2 \cos 2\alpha.$$

II. Für den exzentrischen Kreis ist

$$\sin \varphi = e \sin v, \quad \sin \psi = e' \sin \alpha.$$

Daraus folgt bis auf einen Fehler dritter Ordnung

$$\varphi = e \sin v, \quad \psi = e' \sin \alpha,$$

oder $\varphi = e \sin (\alpha + \varphi + \psi) = e \sin \alpha + e \cos \alpha \cdot (\varphi + \psi)$.

Setzt man im letzten Gliede $\varphi + \psi = (e + e') \sin \alpha$, so erhält man

(3) $\varphi + \psi = v - \alpha = (e + e') \sin \alpha + \frac{1}{2} e (e + e') \sin 2\alpha$.

Projiziert man (Fig. 8) den Radiusvektor SL auf die Gerade OL, so erhält man

$$r \cos \varphi = a - ae \cos E.$$

Setzt man in $\frac{a}{\cos \varphi}$ für $\frac{1}{\cos \varphi} = 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin \alpha^2$,

in $\frac{ae \cos E}{\cos \varphi}$ für $\cos \varphi = 1$, $E = \alpha + e' \sin \alpha$, so erhält man

(4) $\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{4} (e^2 + 2ee') - e \cos \alpha - \frac{1}{4} (e^2 + 2ee') \cos 2\alpha$.

Vergleicht man den exzentrischen Kreis

$$e = 0.11332, \quad e' = 0.07232 \text{ *)}$$

mit der Ellipse für $e = 0.093$, so erhält man als Fehler der wahren Anomalie:

$$\text{Ellipse} - \text{Kreis} = 1'.2 \sin \alpha + 1'.1 \sin 2\alpha,$$

also im Maximum ungefähr $2'$. Der Fehler von $r : a$ ist jedoch, wie aus den Formeln (1) und (3) unmittelbar erhellt, sehr bedeutend.

Für $e' = 0$ ist der exzentrische Kreis mit dem Äquanten identisch, und man hat, wenn $e = 2\varepsilon$ gesetzt wird,

$$v = \alpha + 2\varepsilon \sin \alpha + 2\varepsilon^2 \sin 2\alpha$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \alpha - \varepsilon^2 \cos 2\alpha.$$

Für eine Ellipse mit der Exzentrizität $e = \varepsilon$ beträgt der Unterschied in v

*) Dieser Kreis ist bei Keplers Untersuchung der Marsbahn von großer Wichtigkeit; $e = 0.093$ ist der wahre Wert der Exzentrizität des Mars zu Keplers Zeiten.

$$\text{Ellipse} - \text{Exzenter} = -\tfrac{3}{4}\, e^2 \sin 2\alpha,$$

also für $v = 45^\circ$, 135°, .. ein Maximum.

Man nennt diesen Fall »Einfache Exzentrizität«.

Nach dieser Voraussetzung wurden die Orte der Sonne berechnet. Man hatte bereits damals die Unregelmäßigkeit der jährlichen Sonnenbewegung erkannt, z. B. um vom Frühlingspunkte zum Herbstpunkte zu gelangen, braucht nach Ptolemäus die Sonne 186 Tage 11 Stunden, während sie vom Herbstpunkt zum Frühlingspunkt 178 Tage 18 Stunden benötigt. Selbst in den Teilen dieser Bogen der Ekliptik wurden Unterschiede bemerkt. Wegen der Kleinheit der Exzentrizität $e = 0.0168$ beträgt der größte Fehler dieser Hypothese nur 43″.

Eine von S parallel mit der Geraden OL (oder FL) gezogene Gerade bestimmt die mittlere Sonne*). Die Richtungen von O nach L und von S nach der mittleren Sonne sind daher einander parallel.

Für $e' = e$ »gleiche Teilung der Exzentricität« wird:

$$v = \alpha + 2e \sin\alpha + e^2 \sin 2\alpha$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \tfrac{3}{4}\, e^2 - e\cos\alpha - \tfrac{3}{4}\, e^2 \cos 2\alpha.$$

Diese Konstruktion wurde bei den Planeten, mit Ausnahme des Merkur, angewendet.

Der Unterschied Ellipse — Exzenter beträgt

$$\text{in } v\colon\ + \tfrac{1}{4} e^2 \sin 2\alpha$$

$$\text{»}\ \frac{r}{a}\colon\ - \tfrac{1}{4} e^2 (1 - \cos 2\alpha).$$

Für $\alpha = 45^\circ$, 135°, .. ist der Unterschied von v, und für $\alpha = 90^\circ$, 270° der von $\frac{r}{a}$ ein Maximum.

*) Diese mittlere Sonne ist nicht identisch mit der mittleren Sonne, welche uns zum Maß der Zeit dient; letztere bewegt sich im Äquator gleichförmig und geht mit der, durch die mittlere Anomalie bestimmten, ersten mittleren Sonne gleichzeitig durch den Frühlingspunkt.

Für den Planeten Mars ist $e = 0.093$; also die größten Unterschiede von v und $\frac{r}{a}$ resp. $\pm 7'.5$ und $- 0.00432$.

45.

Bestimmung der Länge der Planeten.

Die Bewegung des Planeten in Länge ist zusammengesetzt aus der Bewegung des Mittelpunktes des Epicykels im exzentrischen Kreise und des Planeten im Umfange des Epicykels; die Regeln der Berechnung sind jedoch verschieden für die oberen Planeten (Mars, Jupiter, Saturn) und unteren Planeten (Venus und Merkur).

Bei der Längenbestimmung werden die Ebene des exzentrischen Kreises und des Epicykels in der Ekliptik liegend vorausgesetzt. [14])

1) Bei den oberen Planeten hatte man beobachtet, daß im Mittel jeder Planet in seiner siderischen Umlaufszeit zu demselben Punkt des Tierkreises zurückkehrt; d. h., daß die erste Ungleichheit von dem Orte der Sonne unabhängig ist. Der Mittelpunkt L des Epicykels bewegt sich daher in der siderischen Umlaufszeit des Planeten im Umfange des exzentrischen Kreises von der gleichen Teilung der Exzentrizität derart, daß, für die Erde als Mittelpunkt der Welt im Punkte S, diese Bewegung vom Punkt F aus gleichförmig erscheint.

Die zweite Ungleichheit hängt von der Stellung des Planeten gegen die Sonne ab. Geht die Linie nach der mittleren Sonne durch den Planeten, so findet eine mittlere Konjunktion oder Opposition des Planeten mit der Sonne statt*). Zur Zeit der mittleren Konjunktion befindet

*) Ein Gestirn ist in Konjunktion oder Opposition mit der Sonne, wenn der Längenunterschied resp. 0 oder 180° beträgt; die heliozentrische Länge des Gestirnes ist dann gleich der geozentrischen.

sich der Planet im wahren Apogeum, zur Zeit der mittleren Opposition im wahren Perigeum des Epicykels; es verschwindet daher die zweite Ungleichheit.

Die Bewegung des Planeten M im Epicykel geschieht nun derart, daß der Winkel $A'LM$ gleich ist dem Überschusse der mittleren Sonnenbewegung in der Ekliptik über die wahre Bewegung des Punktes L für die seit der mittleren Konjunktion verflossene Zeit.

Daraus folgt, indem man zu beiden Bewegungen die gemeinschaftliche Länge zur Zeit der mittleren Konjunktion addiert:

Länge der mittleren Sonne — wahre Länge des Punktes L = Winkel $A'LM$; d. i. die Gerade LM ist parallel zu der vom Punkte S nach der mittleren Sonne gezogenen Geraden.

Für die Berechnung des Ortes M sei die Lage der Apsidenlinie des exzentrischen Kreises, die Exzentrizität, das Verhältnis der Radien der beiden Kreise und die mittlere Länge des Punktes L gegeben.

Man bestimme die mittlere Anomalie = mittlere Länge — Länge des Perihels und aus dieser nach Art. 43. die wahre Anomalie und die Größe $SL = r$, wobei $OL = 1$ gesetzt wird.

In dem Dreiecke SLM rechne man nun aus SL, LM und dem eingeschlossenen Winkel die Distanz SM und den Winkel LSM; dieser zur Länge des Punktes L hinzuaddiert, gibt die Länge des Planeten M.[15])

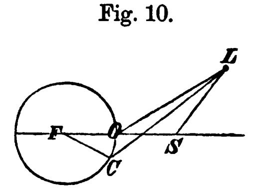
2) Bei den unteren Planeten hatte man beobachtet, daß sie im Mittel mit der Sonne zugleich zu demselben Punkt des Tierkreises zurückkehren und daß die zweite Ungleichheit von dem Orte der Sonne unabhängig ist.

Für die **Venus** gilt dieselbe Berechnungsmethode der Länge wie bei den oberen Planeten; jedoch mit dem Unterschiede, daß die Bewegung des Mittelpunktes des Epicykels identisch ist mit der Bewegung der mittleren Sonne, wogegen sich der Planet in der synodischen Umlaufszeit (= 583 Tage) im Epicykel gleichförmig herumbewegt.

3) Für den Planeten **Merkur** (derselbe bereitete, wegen der bedeutenden Exzentrizität = $\frac{1}{5}$, den alten Astronomen größere Schwierigkeiten) wurde eine besondere Theorie gegeben.

Um den Punkt F (Fig. 10) beschreibe man mit dem Radius ae einen Kreis, welcher also durch den Punkt O, welcher das *punctum aequans* ist, geht. Von O aus bewegt sich der Mittelpunkt C des deferierenden Kreises entgegengesetzt der Bewegung der Himmelskörper derart, daß der Winkel OFC gleich der mittleren Anomalie des Planeten ist. Die mittlere Länge des Mittelpunktes des Epicykels ist gleich der Länge der mittleren Sonne.

Fig. 10.



Beschreibt man aus C mit dem Radius des deferierenden Kreises einen Kreis, welcher die unter der Richtung der mittleren Anomalie gezogene Gerade OL im Punkte L schneidet, so ist L der Mittelpunkt des Epicykels. Dazu kommt noch die Bewegung des Planeten im Epicykel, welche in der synodischen Umlaufszeit (= 116 Tage) einen Umlauf beträgt.

Die Theorie des Planeten Merkur unterscheidet sich von der für die übrigen Planeten:

1) Durch die einfache Exzentrizität.

2) Der Mittelpunkt des deferierenden Kreises ist nicht fest, sondern bewegt sich auf einem Kreise, dessen

Radius $= ae$ und dessen Mittelpunkt das frühere *punctum aequans* ist.[16])

46.

Bestimmung der Breite der Planeten.

1) Für die oberen Planeten. Hinsichtlich der Breite dieser Planeten hat man folgende Erscheinungen beobachtet: Die Breiten sind sowohl nördlich als südlich, die nördlichen Breiten sind häufiger als die südlichen; die größten nördlichen Breiten sind untereinander verschieden; dasselbe gilt auch von den südlichen, letztere sind größer als erstere. Während eines siderischen Umlaufes verschwinden die Breiten zweimal.

Durch das Weltzentrum S sei eine auf die Apsidenlinie senkrechte Gerade gezogen — die Knotenlinie des exzentrischen Kreises; der Ebene desselben gebe man eine solche (feste) Neigung gegen die Ekliptik, daß der größere Teil des exzentrischen Kreises nördlich, der kleinere also südlich liegt. Liegt der Mittelpunkt des Epicykels in einem Knoten des exzentrischen Kreises, so fällt die Ebene des Epicykels mit der Ekliptik zusammen; die Breite des Planeten verschwindet. Während der Bewegung des Mittelpunktes des Epicykels vom aufsteigenden Knoten bis zum Apogeum A neigt sich dessen Ebene langsam, sodaß das Apogeum des Epicykels sich nach Süden, das Perigeum nach Norden wendet; dabei bleibt der mittlere Durchmesser parallel zur Ekliptik. Am größten ist diese Schwankung im höchsten Punkte des exzentrischen Kreises, d. i. im Punkte A. Von diesem Punkte bis zum absteigenden Knoten vermindert sich diese Schwankung nach demselben Gesetze. Bei der weiteren Bewegung des Mittelpunktes des Epicykels nähert sich dessen Apogeum nach Norden, also das Perigeum nach Süden.

2) **Für die unteren Planeten** wird die Breite durch eine veränderliche Neigung der Ebene des deferierenden Kreises gegen die Ekliptik und durch Schwankungen der Ebene des Epicykels um dessen mittleren Durchmesser und dessen Apsidenlinie erklärt.

Zweiter Abschnitt.

Neuere Theorien.

a) Kopernikus.

47.

Die Planetentheorie des Ptolemäus hat sich beinahe vierzehn Jahrhunderte erhalten, dieselbe war die herrschende bei allen gebildeten Völkern. Die Geistesschätze der Griechen in der Astronomie wurden im Mittelalter hauptsächlich durch die Araber erhalten; in Deutschland geschah die Begründung der Astronomie im fünfzehnten Jahrhundert durch **Peurbach** und **Regiomontanus**, welche in der Wiederherstellung des bei den Griechen eingenommenen Standpunktes und des Verständnisses des Almagestes bestand.

Erst mit dem Ende des Mittelalters trat eine große Revolution der Sternkunde durch **Nikolaus Kopernikus** (geb. 1475, gest. 1543) ein. Kopernikus zeigte in seinem Werke *De revolutionibus orbium coelestium*, welches 1543 zu Nürnberg erschien, daß sich die Erscheinungen der Bewegungen der Gestirne viel einfacher erklären lassen, wenn man die Bewegung der Erde voraussetzt. Die Idee der Einheit und Einfachheit der Natur dürften ihn besonders zu dieser Annahme geführt haben — weniger die Schriften

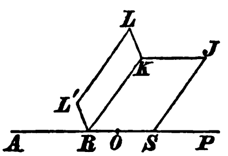
der Alten, indem die daselbst (von Nicetas, Philolaus u. a.) gegebenen Andeutungen über die Bewegung der Erde, weil damit nicht eine Erklärung der Erscheinungen der Bewegungen der Himmelskörper verbunden wurde, ziemlich spurlos vorübergehen mußten. Zu diesem Zwecke gab Kopernikus der Erde drei Bewegungen: 1) Eine Achsendrehung, um die tägliche Umdrehung der Himmelskugel, 2) eine jährliche Bewegung der Erde mit einer schiefen Lage der Erdachse gegen die Ekliptik, um die jährliche Bewegung der Sonne und die Schiefe der Ekliptik, 3) eine langsame Bewegung der Pole der Erdachse um die Pole der Ekliptik, um die Erscheinung der Präzession der Nachtgleichen zu erklären.

Für die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne setzte Kopernikus, übereinstimmend mit Ptolemäus, die einfache Exzentrizität voraus.

Für die Erklärung der ersten Ungleichheit der Planetenbewegung (die zweite Ungleichheit fiel infolge der jährlichen Bewegung der Erde weg) bediente sich Kopernikus der Epicykeln.

Es sei (Fig. 11) S der Mittelpunkt der Welt, als welcher von Kopernikus der Mittelpunkt der Erdbahn, d. i. der mittlere Sonnenort, angenommen wurde.

Fig. 11.



Die Gerade AP sei die Apsidenlinie. Um den Punkt S bewege sich in der Entfernung $SJ = a$ der Mittelpunkt J des größeren Epicykels vom Halbmesser $JK = \frac{3}{2} ae$, um den Punkt J bewege sich der Mittelpunkt K des kleineren Epicykels vom Halbmesser $KL = \frac{1}{2} ae$, und im Umfang des letzteren der Planet L derart, daß die Winkel der Geraden SJ, JK, KL mit der Apsidenlinie AP resp.:

$$\alpha,\ 180^0,\ 2\alpha$$

sind, wo α die mittlere Anomalie bedeutet.

Zieht man die Gerade KR parallel zur Geraden JS und macht $SO = ae$, so ist $SR = \frac{3}{2}ae$ und $RO = \frac{1}{2}ae$; d. h. die Bewegung ist dieselbe, wenn sich der Punkt K um den Punkt R und der Planet L um den Punkt K bewegt.

Zieht man die Gerade $RL' = \frac{1}{2}ae$ parallel mit der Geraden KL, so sind LL', KR, JS einander parallel; d. h. man kann auch den Punkt L' um den Punkt R und den Planeten L um den Punkt L' sich bewegen lassen.

Diese drei von Kopernikus unter den Namen 1) *Epicepicyclus*, 2) *Eccentrepicyclus*, 3) *Eccentri eccentrus* angegebenen Formen der Planetentheorie, geben also denselben Ort des Planeten. Dieselben wurden unmittelbar bei den Planeten, mit Ausnahme Merkurs, angewendet; letzterer erforderte wegen der großen Exzentrizität eine besondere Theorie.

Setzt man $SL = r$ und bezeichnet man den Winkel PSL mit v, so erhält man durch Projektion auf ein durch den Punkt S gelegtes rechtwinkliges Achsensystem, für welches die Gerade AP die x-Achse ist, die Gleichungen

$$r \cos v = a \cos \alpha - \tfrac{3}{2}ae + \tfrac{1}{2}ae \cos 2\alpha$$
$$r \sin v = a \sin \alpha \qquad + \tfrac{1}{2}ae \sin 2\alpha,$$

woraus folgt

$$r \cos(v - \alpha) = a - ae \cos \alpha$$
$$r \sin(v - \alpha) = \quad 2ae \sin \alpha,$$

und damit

$$\operatorname{tang}(v - \alpha) = \frac{2e \sin \alpha}{1 - e \cos \alpha},$$

also bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$v = \alpha + 2e \sin \alpha + e^2 \sin 2\alpha$$
$$\frac{r}{a} = 1 + e^2 - e \cos \alpha - e^2 \cos 2\alpha.$$

Hinsichtlich der wahren Anomalien ersetzen sich, bis auf Glieder zweiter Ordnung der Exzentrizität (einschließlich) die kopernikanische Theorie und der exzentrische Kreis mit gleicher Teilung der Exzentrizität. Vergl. Art. 44.

Die Breite der Planeten wird bei Kopernikus durch ähnliche Schwankungen wie bei Ptolemäus erklärt.

b) Tycho Brahe und Kepler.

48.

Das kopernikanische System hatte anfänglich viele Gegner gefunden, wozu mancherlei Veranlassung war. Erstens war der unmittelbare Gewinn für die berechnende Astronomie gering; denn die Basis der kopernikanischen Planetentheorie waren größtenteils die alten Beobachtungen, auf welchen der Almagest des Ptolemäus beruhte, nur einige wenige Beobachtungen von Kopernikus selbst und drei nürnberger Beobachtungen des Planeten Merkur von Bernhard Walther und Johann Schoner wurden noch verwendet. Die von Erasmus Reinhold nach dieser Theorie berechneten prutenischen Tafeln wichen zu Keplers Zeiten von dem beobachteten Orte um Grade ab, sodaß sich die Richtigkeit der Theorie nicht prüfen ließ und das Ansehen des Almagest bei der Unduldsamkeit der religiösen Parteien dadurch fast gar nicht erschüttert wurde.

Der Einwurf, daß die Fixsterne keine jährlichen Parallaxen zeigen, konnte, unter Hinweisung auf die Kleinheit derselben, wegen der Ungenauigkeit der Beobachtungen der damaligen Zeit, noch leicht zurückgewiesen werden.

Außerdem machte das Verständnis des kopernikanischen Werkes den Zeitgenossen bedeutende Schwierigkeiten; denn früher hatte man vorausgesetzt, daß jede beobachtete

Bewegung eines Körpers demselben auch wirklich zukomme, während Kopernikus die Stillstände und rückläufigen Bewegungen für Schein erklärte, entstanden durch die Bewegung der Erde. Man warf dem neuen Systeme vor, daß es die Begriffe von Ruhe und Bewegung verwirre. Von diesem Vorwurfe wurde es erst durch Galilei durch die Einführung des Begriffes der relativen Bewegung gereinigt. Außerdem lieferte Galilei durch die vermittelst seines Fernrohres erhaltenen Entdeckungen: der Mondberge, Sonnenflecken, Jupitertrabanten (ein Abbild der Planeten), Venusphasen und die Auflösung der Milchstraße in Sterne, Belege für das kopernikanische Weltsystem.

Das größte Verdienst für das kopernikanische System gebührt jedoch Keplern.

49.

Johannes Kepler, geb. 1571 zu Weil im Württembergischen, war berufen, der eigentliche Reformator der theoretischen Astronomie zu werden. Von Tübingen, wo ihn sein Lehrer Mästlin in das kopernikanische System einführte, wurde er nach vollendeten Studien den steirischen Ständen als Lehrer der Mathematik und Moral für das protestantische Gymnasium in Graz empfohlen. Unterstützt von einer fast divinatorischen Erfindungsgabe vereint mit einem eisernen Fleiße und einer unbegrenzten Vorliebe für alles Geheimnisvolle und Wunderbare, gelang es Keplern, die wahren Gesetze der Planetenbewegung zu entdecken. Dabei ist es höchst beachtenswert, daß Kepler dieselben hauptsächlich zum Zwecke der Begründung seiner kosmischen Ideen, welche in einer Vereinigung der pythagoräischen Vorstellungen mit den christlichen Ideen seiner Zeit bestanden, entdeckte. Dieser mystische Zug seines Geistes

tritt am deutlichsten in seinem bereits 1596 erschienenen Erstlingswerke (*Prodromus* . . .) hervor.

Anfänglich suchte Kepler ein Gesetz zwischen den Entfernungen der Planeten von der Sonne, jedoch ohne Erfolg; nun versuchte er auf geometrischem Wege das Geheimnis des Weltbaues zu ergründen. Das Krumme ist ein Bild Gottes, in der Kugel selbst ist durch den Mittelpunkt, die Oberfläche und die Gleichheit der Beschaffenheit zwischen Mittelpunkt und Oberfläche die Dreieinigkeit versinnlicht. Bei der Erschaffung der Welt wurde zuerst die alles umfassende Fixsternensphäre nach dem Vollkommensten in der Geometrie, dem Bilde der Kugel, geschaffen. Das Vollkommenste nach der Kugel sind die fünf regulären Körper. Diese hatten schon bei den Pythagoräern eine kosmologische Bedeutung. Es bedeutete nämlich der Würfel die Erde, das Ikosaëder den Himmel, die Pyramide das Feuer, die beiden übrigen die Luft und das Wasser. Das Planetensystem ist daher nach der Idee der fünf regulären Körper gebildet. Dieser Grundgedanke wird nun auf folgende Art durchgeführt: Jedem regulären Körper läßt sich eine Kugel umschreiben und einschreiben. Die sechs Planetensphären bilden fünf Zwischenräume, zwischen welche man die fünf regulären Körper so einschalten kann, daß — die Sonne als gemeinsamer Mittelpunkt der Sphären und regulären Körper vorausgesetzt — jedem dieser Körper eine Sphäre um- und einbeschrieben ist.

Die Aufeinanderfolge ist derart: Saturn, Kubus, Jupiter, Tetraëder, Mars, Dodekaëder, Erde, Ikosaëder, Venus, Oktaëder, Merkur. Dabei ist die Saturnsphäre dem Würfel umschrieben, die Jupitersphäre dem Würfel einbeschrieben und dem Tetraëder umschrieben, u. s. w.

Da jedoch die Bewegung der Planeten nicht in Kreisen

geschieht, in deren Mittelpunkt sich die Sonne befindet, sondern in exzentrischen Bahnen, so gab Kepler den Sphären (ähnlich wie Peurbach) eine solche Dicke, als der Unterschied der größten und kleinsten Entfernung des Planeten von der Sonne beträgt. Die Anordnung war nun so, daß z. B. die innere Oberfläche der Saturnsphäre dem Würfel umschrieben, die äußere Oberfläche der Jupitersphäre dem Würfel einbeschrieben war, und ebenso bei den übrigen Planeten.

Setzt man den Halbmesser der umschriebenen Kugel = 1000, so ist der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel im

Kubus	577
Tetraëder	333
Dodekaëder	795
Ikosaëder	795
Oktaëder	577

Beschreibt man in das von den vier mittleren Seiten des Oktaëders gebildete Quadrat einen Kreis, so ist dessen Halbmesser = 707.

Für die aus der Theorie des Kopernikus folgenden Werte der Entfernungen der Planeten vom Mittelpunkte der Erdbahn ergibt sich:

Setzt man die kleinste Entfernung von	Saturn	= 1000, so ist die größte Entfernung von	Jupiter	= 635
	Jupiter		Mars	333
	Mars		Erde	757
	Erde		Venus	794
	Venus		Merkur	723 *).

*) Aus den tychonischen Beobachtungen folgen die Zahlen: 608, 336, 737, 742, 654, welche von den neueren Angaben nicht viel abweichen.

tritt am deutlichsten
Erstlingswerke (*Pro*
Anfänglich such
fernungen der Pl
folg; nun versuch
heimnis des We
ein Bild Gottes,
punkt, die Ob
heit zwischen
versinnlicht.
die alles u
kommensten
schaffen. I
fünf regul
räern ein
der Würf
ramide
Wasser.
fünf
wird
Körp
Die
zwis
sch
pr
j

·bachtungen anstrebte. Nach seiner Rückkehr nach ·nemark ließ ihm der König Friedrich II., welcher durch ·n Landgrafen Wilhelm auf Tycho aufmerksam gemacht ·r, auf der Insel Hween ein mit allen Hilfsmitteln ver- ·henes Observatorium »Uranienburg« errichten.

Mit Hilfe zahlreicher Schüler wurde in dem Zeitraume ·n 21 Jahren ein großes Fixsternverzeichnis angelegt, fort- ·setzte Beobachtungen der Sonne, des Mondes, der Pla- ·ten und Kometen angestellt. Es wurden die Instrumen- ·lfehler mit Hilfe der Beobachtungen bestimmt, und die ·orrektionen der Beobachtungen ermittelt.

Nach dem Tode Friedrichs II. wurde Tycho durch die ·ntriguen des Ministers Walkendorf gezwungen, sein Vater- ·ınd zu verlassen. Er folgte nun einem Rufe des Kaisers Rudolf II. nach Prag, welches nun der Sitz der Astronomie wurde. Hier sollten vor allem aus den Beobachtungen neue astronomische Tafeln gerechnet werden, zu welcher Arbeit fast alle mathematischen Kräfte der damaligen Zeit aufgeboten wurden; auch Kepler, welcher durch sein Geheimnis des Weltbaues bereits die Aufmerksamkeit der astronomischen Welt auf sich gelenkt hatte, wurde hierzu von Tycho eingeladen. Kepler, ohnedies durch die Religionsverfolgung bedrängt, kam gegen Ende Januar 1600 nach Prag. Hier hatte Tycho mit Hilfe des Longomontanus bereits die Theorie der Sonne und des Mondes vollendet, und machte sich eben an die Bearbeitung der Planeten, als er plötzlich (1601) starb.

Das System, nach welchem Tycho die Bewegungen der Planeten darstellen wollte, war ein Übergang vom ptolemäischen zum kopernikanischen. Tycho setzt die ruhende Erde als Weltzentrum voraus, läßt um dieselbe in einem exzentrischen Kreise mit einfacher Exzentrizität die Sonne

bewegen und um diese in der ersten kopernikanischen Form (*Epicepicyclus*) die Planeten, wobei sogar mit Ausnahme des Planeten Mars dasselbe Verhältnis der Radien der Epicykeln angenommen wurde. Außerdem bezog man im tychonischen Systeme die Beobachtungen nicht auf den wahren Sonnenort, sondern auf den mittleren d. i. den Mittelpunkt der Erdbahn.

51.

Kepler nach Tychos Tode zum Leiter der kaiserlichen Sternwarte ernannt, hatte nun dessen astronomische Aufgaben übernommen. Da Longomontanus sich gerade mit den Arbeiten über den Planeten Mars beschäftigte, so begann Kepler seine Untersuchungen mit diesem Planeten. Man hatte für denselben bereits eine Theorie erdacht, welche die Längen in der Bahn auf ungefähr 12′ darstellte, nur mit den Breiten ging es ziemlich schlecht.

Der Planet Mars ist ganz geeignet für eine richtige Theorie die Grundlage zu liefern. Die verhältnismäßig kurze Umlaufszeit (nahezu zwei Jahre) gestattet bei ihm als oberen Planeten eine Verfolgung an allen Punkten seiner Bahn in einem Zeitraum von wenig Jahren. Die bedeutende Exzentrizität der Marsbahn $= \frac{1}{11}$ und die Nähe des Planeten zur Erde zur Zeit der Opposition bewirkt, daß die Unrichtigkeit einer falschen Annahme in der Figur der Bahn augenblicklich hervortreten mußte. Dem Kepler standen die zahlreichen Beobachtungen Tychos zu Gebote. Diese umfaßten einen Zeitraum von 16 Jahren, waren auf die ganze Bahn gleichförmig verteilt und dabei von einer großen Genauigkeit, auf höchstens 2′ unsicher. Für die späteren Zeiten bediente sich Kepler teils eigener teils der ebenfalls vortrefflichen Beobachtungen des David Fabricius.

Die Bemühungen Keplers in Betreff des Planeten Mars führten ihn schließlich zur Entdeckung seiner beiden ersten Gesetze, welche in dem Werke: »*Astronomia nova αἰτιολόγητος, seu Physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis, ex observationibus G. V. Tychonis Brahe . . . 1609*« enthalten sind.

Die Schwierigkeiten dieser Untersuchungen bestanden darin, daß zwei Aufgaben: die Auffindung der Bewegungsgesetze und die Bestimmung der Elemente des Mars zugleich gelöst werden mußten. Für jede Annahme der Bewegungsgesetze mußten die Elemente meist neu bestimmt werden; für die Richtigkeit der Annahme und der daraus gefolgerten Elemente diente die Darstellung solcher Beobachtungen, aus welchen die Elemente nicht gerechnet waren, als Kontrolle. Dabei mußte die Übereinstimmung von Beobachtung und Rechnung so weit geführt werden, daß der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung den größten zulässigen Beobachtungsfehler nicht überstieg.

52.

Kepler folgte bei seinen Untersuchungen anfangs noch den Ideen des Ptolemäus, Kopernikus und Tycho. Zunächst suchte er die Lösung der Frage der ersten Ungleichheit, die Bestimmung der Elemente der Marsbahn; für die Bewegung wurden die früheren Gesetze vorausgesetzt.

Bei der Bestimmung der Elemente können die auf die Lage der Bahn bezüglichen getrennt von den übrigen bestimmt werden; Kepler begann daher seine Untersuchungen mit der Bestimmung der Lage der Marsbahn, d. i. mit der Bestimmung der Knoten und der Neigung.

I. Ist der Planet zur Zeit der Opposition im Knoten, so ist dessen Breite gleich Null und die beobachtete geozentrische Länge = der heliozentrischen Länge = der Länge des Knotens. Kepler findet für die Länge des aufsteigenden Knotens ☊ $= 46\frac{1}{3}°$. Den absteigenden Knoten findet Kepler auf der entgegengesetzten Seite der Sonne, also um 180° verschieden.

II. Die Neigung bestimmt Kepler direkt aus solchen Beobachtungen des Planeten Mars, für welche sich die Erde in der Knotenlinie der Marsbahn befand. Ist σ nämlich der Unterschied der geozentrischen Länge des Mars und des Knotens, β die beobachtete Breite, so wird die Neigung i erhalten aus:

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin \sigma}.$$

Ist zugleich $\sigma = 90°$, d. h. die Sonne mit dem Planeten in Quadratur, so ist $i = \beta$, d. h. die beobachtete Breite = der Neigung der Bahn. Auch eine Beobachtung dieser Art fand Kepler in dem tychonischen Nachlasse. Kepler findet auf diese Art, und durch zwei andere Methoden bestätigend, für die Neigung den Wert

$$i = 1° 50'.$$

Durch die Vergleichung einer größeren Anzahl von Beobachtungen erhält Kepler das wichtige Resultat: 1) Die Knotenlinie der Marsbahn geht nicht durch den mittleren Sonnenort (durch den wahren bestätiget er am Schlusse) und hat eine konstante Lage; 2) die Neigung ist unveränderlich. Es gibt daher keine Schwankungen der exzentrischen Bahnen.

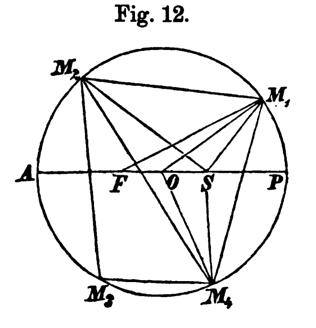
III. Kepler reduzierte nun die auf den Mittelpunkt der Erdbahn bezogenen Längen des Planeten Mars auf den

wahren Ort der Sonne; denn letztere ist das Zentrum der Welt, nicht der leere Mittelpunkt der Erdbahn.

Von zwölf Oppositionen des Planeten Mars wählte Kepler vier aus (die von den Jahren 1587, 1591, 1593, 1595), für diese vier Orte waren gegeben: a) Die vier wahren Längen in der Bahn. b) Die vier mittleren Längen in der Bahn, deren Differenzen man, da die mittlere Bewegung durch die Umlaufszeit bekannt war, genau kannte. Infolge der Ungenauigkeit der ersten mittleren Länge konnte man dieselben mit einem konstanten Fehler voraussetzen. c) Die beobachteten (geozentrischen) Breiten.

Es seien (Fig. 12) M_1, M_2, M_3, M_4 die vier Orte des Planeten in der Bahn, S sei der Mittelpunkt der Sonne, ASP die Apsidenlinie. Kepler suchte nun eine Bahn unter der Voraussetzung, daß erstens die vier Punkte $M_1 \ldots M_4$ in einem Kreise, dessen Mittelpunkt O ist, liegen, zweitens die Bewegung des Planeten von dem Punkte F aus gleichförmig erscheint, wobei die Punkte F, O, S in der Apsidenlinie liegen. Die letztere Annahme wird dadurch gefordert, daß die Bewegung am schnellsten ist, wenn das Gestirn der Sonne am nächsten ist.

Fig. 12.



Die Auflösung geschieht indirekt. Es werde die Lage der Apsidenlinie und die erste mittlere Anomalie, also die Winkel

$$PSM_1,\quad PFM_1$$

als bekannt vorausgesetzt*).

*) Näherungswerte waren von Tycho gegeben.

Man setze $FS = c$, und rechne aus den Dreiecken FSM_1, FSM_2, FSM_3, FSM_4, in welchen die Seite FS und die Winkel an derselben bekannt sind, die Entfernungen SM_1, SM_2, SM_3, SM_4 in Teilen von c.

Aus den Dreiecken $SM_1 M_2$ und $SM_1 M_4$ erhält man den Winkel M_1 des Vierecks $M_1 M_2 M_3 M_4$ und analog die Winkel M_2, M_3, M_4. Sollen die vier Punkte $M_1 \,..\, M_4$ in einem Kreise liegen, so muß daher

$$1)\quad M_1 + M_2 = M_2 + M_4 = 180^\circ.$$

Da der Punkt O als Mittelpunkt des Kreises vorausgesetzt wird, so ist Winkel $M_1 OM_4 = 2 M_1 M_2 M_4$, der letztere Winkel ist durch die Teile $M_1 M_2 S$ und $S M_2 M_4$ bekannt. Bestimmt man im Dreiecke $SM_1 M_4$ die Seite $M_1 M_4$, so kann man im gleichschenkligen Dreiecke $OM_1 M_4$ den Radius $OM_1 = OM_4$ in Teilen von c und den Winkel $OM_1 M_4$ rechnen; mithin auch c in Teilen des Radius angeben. Da Winkel $OM_1 S = OM_1 M_4 - SM_1 M_4$ ist, so kann man im Dreiecke OSM_1 die Seite OS und den Winkel OSM_1 bestimmen; nun ist Winkel

$$2)\quad OSM_1 = 180^\circ - PSM_1.$$

Man ändert nun die Lage der Geraden AP d. h. den Winkel PSM_1 und die erste mittlere Anomalie d. h. den Winkel PFM_1 so lange, bis die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind.[17])

Nach siebenzig Versuchen erhielt Kepler eine Kreisbahn; dabei war, $OP = OA = 1$ gesetzt:

$$FO = 0.07232, \quad OS = 0.11332,$$

also die ganze Exzentrizität $= 0.18564$, die Hälfte $= 0.09282$.

Kepler nannte diese Bahn die stellvertretende Hypothese, dieselbe stellte (vergl. Art. 44.) die Längen in der Bahn auf ungefähr 1′ bis 2′ dar, also bis auf die Genauigkeit

der tychonischen Beobachtungen; sie gibt aber den Radiusvektor falsch.

Ungeachtet der guten Darstellung der Längen in der Bahn (von den Breiten macht Kepler keine Erwähnung) verwarf Kepler diese exzentrische Kreisbahn; dazu bewogen ihn die unmittelbaren Bestimmungen der Entfernungen des Mittelpunktes der Bahn von dem Mittelpunkte der Welt (d. i. der Sonne). Kepler bestimmt aus solchen Beobachtungen, wo der Planet in der Nähe des Aphel und Perihel war (mit Zuziehung der tychonischen Daten für die Entfernung der Erde von der Sonne) die größte und kleinste Entfernung des Mars von der Sonne und daraus die Exzentrizität.[18]) Er findet hierbei e nahe $= 0.09$, welcher Wert von $e = 0.11332$ sehr verschieden ist, mit dem Werte $\frac{1}{2}(e + e') = 0.09282$ nahe übereinstimmt. Kepler versuchte nun die gleiche Teilung mit der Exzentrizität $= 0.09282$. Diese Voraussetzung gab in den Anomalien von ungefähr 45°, 135°, .. einen Fehler von $8'$ bis $9'$*). Diese acht Minuten waren für Kepler der Beweis der Unrichtigkeit der exzentrischen Kreisbahn mit gleicher Exzentrizität.

Der stellvertretenden Hypothese bediente sich Kepler zur Berechnung der wahren Anomalie, woher er ihr auch diesen Namen gab.

53.

Mit der Erkenntnis der Unhaltbarkeit der im vor. Art. erwähnten Hypothesen für die Marsbahn trat ein Wendepunkt in den Arbeiten Keplers ein; er folgte von nun an nur mehr seinen eigenen Ideen. Zunächst versuchte nun Kepler die Lösung der Frage der zweiten Ungleichheit,

*) Da dieser Wert der Exzentrizität von dem wahren sehr wenig abweicht, so genügt für die Fehlerschätzung der Unterschied der Glieder der zweiten Potenzen, wie er in Art. 44. angegeben ist.

und da diese ihren Grund in der Bewegung der Erde hat, so suchte Kepler eine genaue Bestimmung der Erdbahn. Die Notwendigkeit der Lösung dieser Aufgabe für die weiteren Untersuchungen über die Marsbewegung hatte er bereits bei der Widerlegung der stellvertretenden Hypothese erkannt.

Tycho hatte die Sonnenbahn als einen exzentrischen Kreis mit dem Mittelpunkt als *punctum aequans* vorausgesetzt. Durch die Bestimmung der größten Mittelpunktsgleichung $\varphi = 2^0\,3\frac{1}{4}'$ erhielt er die Exzentrizität

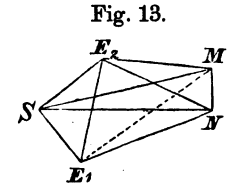
$$\sin\varphi = e = 0.03584, \quad \text{die Hälfte} = 0.01792.$$

Kepler hatte bereits in seinem »Geheimnis des Weltbaues« die Ansicht geäußert, daß, wenn die Erde nach der kopernikanischen Ansicht ein Planet ist, die gleiche Teilung stattfinden müßte. Als nun Tycho an Kepler schrieb, daß sich die Erdbahn (aus den Beobachtungen der oberen Planeten) zu verengern und erweitern scheine, kam Kepler unmittelbar zur Ansicht, daß ihr Mittelpunkt nicht das *punctum aequans* sein könne.

Kepler suchte nun eine unabhängige Bestimmung der Elemente der Erdbahn und bediente sich hierzu der Beobachtungen des Planeten Mars.

Es sei (Fig. 13) der Planet Mars mehrmals in demselben Punkte M seiner Bahn beobachtet worden.[19] Zur Zeit der ersten Beobachtung sei die Erde im Punkte E_1. Ist N die Projektion des Ortes M auf die Ekliptik, so sind, wenn man die heliozentrische Länge des Punktes M oder N und die Länge der Sonne kennt*), im Dreiecke SE_1N

Fig. 13.



*) Die heliozentrische Länge des Mars erhält man hinreichend

die sämtlichen Winkel bekannt, also das Verhältnis

$$SE_1 : SN$$

gegeben.

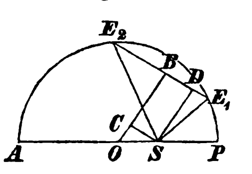
Nach Ablauf eines siderischen Marsjahres befinde sich die Erde im Punkte E_2, man erhält dadurch wieder das Verhältnis

$$SE_2 : SN; \text{ u. s. w.}$$

Man kann daher die Distanzen SE_1, SE_2, .. in Teilen der Distanz SN bestimmen.

1) Sind (Fig. 14) zwei Distanzen SE_1, SE_2 und deren Lage gegeben, so erhält man — die Lage der Apsidenlinie AP der Erdbahn (aus den tychonischen Bestimmungen) als bekannt vorausgesetzt — die Elemente der Erdbahn auf die folgende Art: Im Dreiecke SE_1E_2 bestimme man die Sehne E_1E_2 und den Winkel E_1. Zieht man vom Mittelpunkte O die Gerade $OB \perp E_1E_2$, ferner $SD \perp E_1E_2$, $SC \parallel E_1E_2$, so erhält man im Dreiecke SE_1D die Seiten $SD = CB$ und E_1D und damit

Fig. 14.



$$SC = DB = E_1B - E_1D.$$

Im Dreiecke SOC kennt man die Seite SC und den Winkel OSC, weil die Lagen der Geraden E_1E_2 und AP bekannt sind, man erhält daher die Seite OC und OS.

Aus $OB = OC + SD$ und E_1B erhält man den Radius $OE_1 = OE_2$ und damit die Exzentrizität

$$e = \frac{OS}{OE_1}.$$

2) Sind (Fig. 15) drei Distanzen SE_1, SE_2, SE_3 und deren Lage gegeben, so kann man aus denselben sämtliche

genau aus der stellvertretenden Hypothese, die Länge der Sonne durch die Beobachtung.

Elemente der Erdbahn bestimmen. In dem Dreiecke SE_1E_2 rechne man die Seite E_1E_2, analog E_2E_3, E_3E_1. Nun bestimme man den Winkel $E_1E_3E_2$; da dieser $= \frac{1}{2}$ Winkel E_1OE_2 ist, so kann man im Dreiecke OE_1E_2 den Radius $OE_1 = OE_2$ und den Winkel OE_1E_2 berechnen. Damit erhält man den Winkel $OE_1S =$ Winkel $SE_1E_2 - OE_1E_2$, wodurch im Dreiecke OSE_1 die beiden Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind. Aus dem Dreiecke OSE_1 erhält man die Größe und Richtung der Seite OS.

Fig. 15.

Kepler fand nach diesen Methoden für die Exzentrizität im Mittel den Wert: $e = 0.01800$, also ungefähr den halben Wert der Entfernung des *punctum aequans* von der Sonne nach dem tychonischen System. Damit war die gleiche Teilung der Exzentrizität für die Erdbahn nachgewiesen.

Zusatz. Ist die Erdbahn bekannt, so kennt man im Dreiecke SE_1E_2 der Fig. 13 die Seiten SE_1, SE_2 und den Winkel E_1SE_2. Man kann daher die Seite E_1E_2 und die Winkel bei E_1 und E_2 rechnen. Da der Winkel SE_1N der beobachtete Längenunterschied zwischen Mars und Sonne ist, so ist der Winkel E_2E_1N, und analog der Winkel E_1E_2N bekannt; man kann daher im Dreiecke E_1E_2N die Seiten E_1N und E_2N berechnen. Man kann nun aus dem Dreiecke SE_1N oder SE_2N die Seite SN und die Lage dieser Linie d. i. die Projektion der Entfernung von der Sonne und die heliozentrische Länge des Mars bestimmen.

In dem Dreiecke E_1MN ist der Winkel bei $E_1 =$ der beobachteten Breite, man erhält daher die Distanz MN.

Aus dieser und der Distanz SN erhält man den Winkel $NSM =$ der heliozentrischen Breite des Mars und die Distanz SM des Planeten von der Sonne.

54.

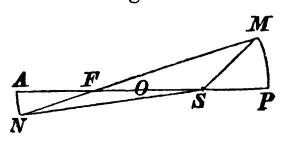
Die leitende Idee für die weiteren Untersuchungen Keplers über die Bewegung des Mars lieferte ihm die bereits im Geheimnis des Weltbaues ausgesprochene Ansicht, daß die Sonne die Ursache der Planetenbewegung ist, also die Geschwindigkeit des Planeten von seiner Entfernung von der Sonne abhängig ist. Die Kraft, welche den Planeten kreisförmig bewegt, nimmt nämlich mit der Entfernung ab; denn sie verbreitet sich (ähnlich wie das Licht) auf einen größeren Raum. Dieser Gedanke führte ihn zunächst zur Entdeckung seines zweiten Gesetzes, welches also der Zeit nach das erste ist.

Die Ableitung geschieht bei Kepler auf die folgende Art:

1) Die Zeit, welche der Planet braucht, um gleiche und unendlich kleine Bogen des exzentrischen Kreises zu beschreiben, sind der Entfernung des Planeten von der Sonne proportional. Für die Orte des Planeten in der Nähe des Perihel und Aphel wird dies im Sinne der ptolemäischen Theorie so bewiesen:

Es sei (Fig. 16) MFN eine durch das *punctum aequans* F gezogene Gerade, welche mit der Apsidenlinie PA einen sehr kleinen Winkel bildet, so werden die Bogen PM und AN in gleichen Zeiten zurückgelegt. Da für die Bogen MP und AN die Sehnen gesetzt werden können und $\triangle PMF \sim \triangle ANF$ ist, so ist

Fig. 16.



$$PM : AN = FP : FA = SA : SP,$$

oder

$$PM \cdot SP = AN \cdot SA.$$

Ist $PM = ms$, $AN = ns$ und t die Zeit, in welcher der Bogen PM oder AN zurückgelegt wird, so sind die Zeiten, in welcher ein Bogen s in der Nähe des Perihels und Aphels zurückgelegt werden, resp. $\frac{t}{m}$ und $\frac{t}{n}$; also ihr Verhältnis $= SP : SA$.

Diesen für die Apsiden gefundenen Satz dehnt Kepler auf alle Punkte der Bahn aus und folgert:

2) Die Summe der Zeiten, in welcher ein endlicher Bogen beschrieben wird, ist also proportional der Summe der Entfernungen, d. i. der Fläche, welche der Radiusvektor durchstreift (zweites keplerisches Gesetz).

Das Gesetz ist richtig, die Ableitung aber falsch, dieselbe gilt nur für die Apsiden, welche Punkte hier Kepler nur berücksichtigt.[20]

Kepler ist sich dieses Fehlers, wenn für die Summen der Entfernungen die Flächen gesetzt werden, bewußt; er hält jedoch an der Richtigkeit des zweiten Gesetzes fortwährend fest, da es, wie im nächsten Art. bewiesen wird, durch die Bewegung der Erde um die Sonne bestätigt wird.

Zusatz. Sind w und w' die den Bogen PM und AN zugehörigen Winkel, so ist

$$PM = SP \cdot w, \quad AN = SA \cdot w,$$

woraus mit Zuziehung von $PM \cdot SP = AN \cdot SA$ folgt

$$w : w' = \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2,$$

welche Gleichung für alle Punkte der Bahn gültig ist; denn sie enthält das zweite Gesetz.

55.

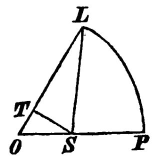
Durch das zweite Gesetz wird zum ersten Mal an die Stelle der bis jetzt festgehaltenen geometrischen

Auffassung der planetarischen Bewegung die mechanische (als Ausfluß der bewegenden Kraft der Sonne) gesetzt.

Dieses Gesetz gibt für die Bewegung eines Himmelskörpers in einer Kreisbahn nachstehende Bestimmung der Mittelpunktsgleichung und des Radiusvektors.

1) Die Fläche SPL (Fig. 17) ist das Maß der mittleren Anomalie, denn dieselbe ist der Zeit proportional.

Fig. 17.



Der Winkel $POL = E$ ist die exzentrische Anomalie.

Die Fläche des Dreiecks SLO ist das Maß des Überschusses der exzentrischen Anomalie über die mittlere.

Der Winkel $\varphi = SLO$ d. i. die optische Gleichung ist der Überschuß der wahren Anomalie über die exzentrische.

Ist t die seit dem Durchgange durch das Perihel verflossene Zeit, U die Umlaufszeit des Planeten, so ist

$$\text{Fläche } SPL : a^2\pi = t : U$$

$$\text{Fläche } SPL = \text{Fläche } OPL - \triangle OSL$$
$$= \tfrac{1}{2} a^2 E - \tfrac{1}{2} a^2 e \sin E,$$

also

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{U} t = \text{mittlere Anomalie} = \alpha.$$

2) Projiziert man den Radiusvektor SL auf die Gerade OL, so erhält man

$$r \cos \varphi = a - ae \cos E$$
$$r \sin \varphi = \quad ae \sin E,$$

woraus

$$r = (a - ae \cos E) \sec \varphi$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{e \sin E}{1 - e \cos E}$$

folgt. Außerdem ist $v = E + \varphi$.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$v = \alpha + 2e \sin \alpha + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2\alpha + \cdots$$

Die Differenz: Ellipse — Kreis $= -\frac{1}{4}e^2 \sin 2\alpha$ *), also im Maximum wieder ungefähr 8′ (welchen Fehler, s. unten, auch Kepler bei der Vergleichung der tychonischen Beobtungen fand). Der Fehler ist (bis auf Glieder zweiter Ordnung) von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Zeichen, wie bei der Hypothese der gleichen Teilung der Exzentrizität.

Für die Erde ist diese Differenz verschwindend; um das neue Gesetz auch durch die Bewegung des Mars zu kontrollieren, ermittelte Keppler aus den Beobachtungen des Mars in der Nähe des Perihel und Aphel neue Werte für die Lage der Apsidenlinie, Perihelzeit, mittlere Entfernung und Exzentrizität der Marsbahn. Die Vergleichung der tychonischen Beobachtungen gab wieder Unterschiede in den Längen, die im Maximum auf ungefähr 8′ stiegen.

56.

Nachdem alle Versuche, unter Voraussetzung des exzentrischen Kreises, die Marsbahn aus den beobachteten Längen zu bestimmen, mißlungen waren, suchte Kepler vermittelst der Entfernungen des Mars von der Sonne die Figur der Bahn zu bestimmen.

Zu diesem Ende rechnete er drei Distanzen außer den Oppositionen; die eine in der Nähe der mittleren Entfernungen, die beiden anderen nahe am Aphel. Das Resultat war folgendes:

aus der Kreishyp. berechnete Entfernungen.	aus den Beob. berechnete Entfernungen.
1.48539	1.47750
1.63883	1.63100
1.66605	1.66255.

*) Vergl. die Note des Art. 52.

Die Fehler betragen resp. 789, 783, 350 Einheiten der fünften Decimale.

Weil die wahren Distanzen kleiner sind, als die aus der Kreishypothese berechneten, so folgerte Kepler: Die Bahn des Planeten ist kein Kreis, sondern eine Art von Oval, welches sich in den Apsiden an den Kreis anschließt, gegen die mittleren Entfernungen zu von dem Kreise immer mehr abweicht. Für diese Ovalform gibt sogar Kepler Gründe; die Konstruktion dieser ovalförmigen Kurve (mit einem breiteren Ende im Aphel und einem spitzeren im Perihel) und die Lösung der Aufgabe: die Größe der Ovalfläche zu bestimmen, sowie dieselbe in Teile nach gegebenem Verhältnisse zu teilen, machten ihm große Schwierigkeiten. Beide Aufgaben wurden nur näherungsweise auf folgende Art gelöst:

1) Die Punkte der Ovallinie werden durch Verbindung der stellvertretenden Hypothese des Art. 52. III. mit der der gleichen Teilung erhalten. Die stellvertretende Hypothese bestimmt die wahre Lage des Radiusvektors. Beschreibt man aus der Mitte O der ganzen Exzentrizität FS (der Fig. 8) mit der mittleren Entfernung als Halbmesser einen Kreis und zieht den Radius ON unter dem Winkel der mittleren Anomalie, so stellt die Distanz SN die wahre Größe des Radiusvektors dar. Zieht man daher von S unter der wahren Lage des Radiusvektors eine Gerade und schneidet auf ihr $SL = SN$ ab, so ist der Punkt L der Ort des Planeten in der Ovale. Aus dieser Konstruktion folgt

$$r^2 = a^2 - 2a^2 e \cos\alpha + a^2 e^2$$
$$= (a - ae\cos\alpha)^2 + a^2 e^2 \sin\alpha^2$$
$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\alpha + \tfrac{1}{2} e^2 \sin\alpha^2;$$
$$\text{Ellipse} - \text{Ovale} = \tfrac{1}{2} e^2 \sin\alpha^2.$$

2) Für die Quadrierung und Teilung der Ovale (von der Sonne aus) bediente sich Kepler einer Ellipse, deren größte Breite des sichelförmigen Randes, den sie vom exzentrischen Kreis abschneidet, $0.00858a$ beträgt; denn von dieser Größe war die größte Breite der durch die Ovallinie abgeschnittenen Sichel.

Als jedoch Kepler die nach der Ovalhypothese berechneten Distanzen des Mars von der Sonne mit den aus den Beobachtungen erhaltenen verglich, fand er sie zu klein, und zwar in der Nähe der mittleren Entfernung um 660 Einheiten der fünften Stelle. Ebenso hatte sein astronomischer Freund David Fabricius, dem er diese letzteren Untersuchungen mitgeteilt hatte, aus der Vergleichung der berechneten (geozentrischen) Orte mit den Beobachtungen geschlossen, daß die Ovalhypothese die Distanzen zu kurz gebe. Kepler war jedoch bereits mit der Verbesserung seiner Theorie beschäftigt, als er von Fabricius diese Nachricht erhielt; diese Verbesserung, die ihn schließlich zur wahren Figur der Marsbahn führte, bot sich ihm auf folgendem Wege dar.

Für den in Art. 55. erwähnten Wert der Exzentrizität $e = 0.09264$ ist die optische Gleichung φ, entsprechend der größten Mittelpunktsgleichung, bestimmt durch

$$\text{tang}\,\varphi = e, \quad \text{also} \quad \varphi = 5^\circ\, 18'.$$

Durch einen glücklichen Zufall geriet Kepler auf die Sekante dieses Winkels $= 1.00429$, welche von der Einheit um 0.00429 abweicht. Ungefähr dieselbe Größe beträgt in der Nähe der mittleren Entfernungen der Fehler von $\frac{r}{a}$ im exzentrischen Kreise. »Setzt man daher in der mittleren Entfernung statt der Sekante der optischen Gleichung den Radius, so erhält man den wahren Wert.« Dieses

für die Anomalien von nahe $= 90^\circ$ oder 270° gefundene Resultat dehnte Kepler auf alle Punkte der Bahn aus; er schloß ganz allgemein, daß man durch die Multiplikation des aus dem exzentrischen Kreise erhaltenen Radiusvektors mit dem Kosinus der optischen Gleichung die wahre Distanz erhält; d. h. daß

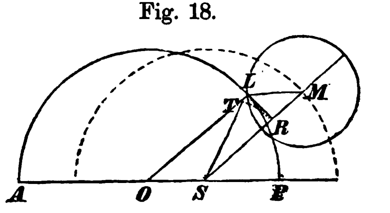
$$r = a - ae \cos E$$

ist.[21]) Dieses Resultat bestätigt Kepler durch die Vergleichung mit einer Reihe von Distanzen, welche er aus den tychonischen Beobachtungen erhalten hatte.

Nachdem das Gesetz für die Größe des Radiusvektors gefunden war, handelte es sich um die Bestimmung der Lage desselben; diese mußte so gewählt werden, daß das obige empirisch gefundene Gesetz nicht gestört würde. Dazu bot sich für Kepler zunächst folgendes dar:

Es sei (Fig. 18) O der Mittelpunkt des exzentrischen Kreises, OS die Exzentrizität. Beschreibt man aus S mit demselben Radius einen Kreis, und aus einem beliebigen Punkt M des Umfanges des letzteren mit dem Radius $= OS$ einen Epicykel, so schneidet dieser den exzentrischen Kreis im Punkte L derart, daß das Viereck $OSML$ ein Parallelogramm ist, wie man unmittelbar ersieht, wenn man die Gerade SL zieht. Ein aus dem Punkte O als Mittelpunkt beschriebener exzentrischer Kreis kann daher durch einen aus S mit demselben Halbmesser beschriebenen Kreis und einen Epicykel ersetzt werden, wenn der Radius des Epicykels gleich ist der Exzentrizität.

Fig. 18.



Ist nun $\measuredangle POL = E =$ exzentrischen Anomalie —

bestimmt nach Art. 55. —, so ist $\sphericalangle LMS = E$, also $SR = SM - RM = a - ae \cos E = r$, wenn $LR \perp SM$ ist.

Der Planet hat sich daher seit seinem Perihel in dem zur Sonne gerichteten Durchmesser des Epicykels von seiner anfänglichen Entfernung $p = a - ae$ um die Größe $q = ae(1 - \cos E)$ entfernt.

Beschreibt man nun aus dem Punkte S mit dem Radius SR einen Kreis, welcher die Gerade OL im Punkte T schneidet, so stellt ST die Größe und Lage des Radiusvektors dar.

Als jedoch Kepler diese Bestimmung der Lage mit der stellvertretenden Hypothese verglich, fand er Unterschiede von $4'$—$5\frac{1}{2}'$; er war nun selbst bereit, das obige richtige Gesetz der Distanzen fallen zu lassen.

Nun kehrte Kepler wieder zur Ellipse zurück, da er sich dieser Linie bereits bei der Ovalhypothese als Hilfsmittel bedient hatte, er setzte jedoch gemäß den früheren Bestimmungen für die Marsbahn eine Ellipse, deren größte Breite des sichelförmigen Randes, welchen dieselbe vom exzentrischen Kreise abschneidet, $0.00429\,a$ beträgt*).

Kepler beweist nun, daß gerade in der Ellipse, wenn sich im Brennpunkte die Sonne befindet,

$$r = a - ae \cos E$$

ist; die Lage des Radiusvektors ist dann bestimmt durch

$$r \cos v = a \cos E - ae.$$

Der Fehler der vorigen Lagenbestimmung hatte, wie Kepler selbst bemerkt, seinen Grund darin, daß statt des Durchschnittspunktes der Senkrechten vom Punkte L auf die Apsidenlinie mit dem Kreisbogen RT (d. i. des Punktes

*) Für die obige Exzentrizität beträgt der genaue Wert dieser Breite $0.00431\,a$.

der Ellipse) der Punkt *T* als Ort des Planeten genommen wird.

Statt des Verhältnisses der elliptischen Flächen setzt Kepler (genau nach dem in Art. 2. durchgeführten Wege) das entsprechende Verhältnis der Flächen des exzentrischen Kreises.

Auf diese Art erhielt Kepler das wichtige Resultat: »Die Bahn des Mars ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte sich der Mittelpunkt der Sonne befindet.«

57.

Schließlich beschäftigte sich Kepler mit einer Verbesserung der Marselemente, namentlich mit der genaueren Bestimmung von Knoten und Neigung, welche für die Darstellung der Breiten von besonderer Wichtigkeit sind. Trotz aller Sorgfalt konnten letztere nur bis auf 4′—5′ dargestellt werden. Kepler schob diese Unterschiede auf die Fehler der Beobachtungen, auf die Refraktion und Parallaxe.

Diese beiden Gesetze wandte Kepler auch auf die übrigen Planeten an, und bestimmte unter Voraussetzung dieser Gesetze deren Bahnelemente. Auf Grundlage dieser neuen Elemente und der tychonischen Beobachtungen der Fixsterne und des Mondes wurden die rudolfinischen Tafeln (erschienen 1627) berechnet; die ersten astronomischen Tafeln, die sich auf die wahre Planetentheorie gründeten. Das Bedürfnis nach neuen, richtigeren Tafeln hatte sich immer mehr gesteigert; denn im Jahre 1625 betrug die Abweichung des Mars von den prutenischen Tafeln nahe 5°. Den Namen trugen die Tafeln von dem Gönner der Astronomie Kaiser Rudolf II. (gest. 1612). Der Anfang zu diesen Tafeln geschah bereits durch Tycho: die theoretischen Arbeiten Keplers, die traurigen Verhältnisse

des dreißigjährigen Krieges hatten das Erscheinen derselben so lange verzögert.

58.

Durch die Bestimmung der genaueren Bahnelemente der Planeten aus den tychonischen Beobachtungen wurde die in Art. 49. angeführte Idee des Geheimnisses des Weltbaues nach den fünf regulären Körpern nicht bestätigt.

Die Aufsuchung des Grundes dieser Abweichung führte Keplern zur Harmonie der Welt, dargestellt in dessen »*Harmonices mundi*, .. *Lincii*, *1619*«, in welcher sein drittes Gesetz enthalten ist.[22])

Den Ausgang dieser Untersuchungen bildete seine bereits im »Geheimnis des Weltbaues« ausgesprochene Ansicht, daß im Sonnensystem (soweit es ihm bekannt war) Gesetz und Ordnung herrsche, d. h. daß die Anzahl der Planeten und die Anordnung ihrer Bahnen bestimmten Gesetzen unterworfen sei und daß die Bewegungen in bestimmten, zum System gehörigen Ursachen ihren Grund haben. Durch das Gesetz der fünf regulären Körper ist nur die Anordnung des Planetensystems im großen und ganzen gegeben, also die Urform des ruhenden Systems; die Bewegung in den einzelnen Intervallen ist durch die Harmonien der Welt (des Himmels) geregelt, — der Bewegung zuliebe mußten die den fünf regulären Körpern entsprechenden Entfernungen etwas geändert werden, sodaß gewisse Unterschiede von der Darstellung nach der Idee der fünf Körper eintreten müssen.

Diese beiden Prinzipe stehen durch die regulären Vielecke in Verbindung. In den fünf regulären Körpern kommen nur das Dreieck, Viereck und Fünfeck vor, ebenso geben nur die Teilungen einer Saite nach den Zahlen 2, 3 und 5 Konsonanzen.

Die Harmonien, wodurch die Bewegungen der Planeten im besonderen bestimmt sind, sind nur in den täglichen heliozentrischen Winkelbewegungen ausgedrückt; — in den täglichen Wegstücken deshalb nicht, weil diese den Entfernungen umgekehrt proportional sind, und letztere den fünf Körpern und nicht den Harmonien angepaßt sind.

Man kann die täglichen Winkelbewegungen gleichsam als Töne betrachten, deren Schwingungszahl gleich ist der Anzahl der Sekunden der Winkelbewegung. Andert sich daher die tägliche Winkelbewegung, so ändert sich der Ton; der Planet wird daher bei seiner Bewegung ein gewisses Tonintervall durchlaufen.

Die täglichen Winkelbewegungen ändern sich mit den Entfernungen des Planeten von der Sonne; sind nämlich w, w' die täglichen Winkelbewegungen für die Zeiten t, t', dic zugehörigen Entfernungen r, r', so ist nach dem zweiten keplerischen Gesetze

$$r^2 w = r'^2 w',$$

wenn die Größen r, r'; w, w' innerhalb eines Tages als konstant angesehen werden. Daraus folgt

$$r : r' = \sqrt{w'} : \sqrt{w}.$$

Aus dem Verhältnisse der größten und kleinsten täglichen Winkelbewegung kann man das Verhältnis der kleinsten und größten Entfernungen bestimmen, und damit erhält man die Exzentrizität

$$= \frac{r' - r}{r' + r} = \frac{1 - r : r'}{1 + r : r'},$$

wo r die kleinste und r' die größte Entfernung bedeutet.

59.

Die Harmonien sind nach Kepler in der Planetenbewegung in folgender Weise ausgedrückt:

1) Sind die Verhältnisse der langsamsten Bewegung eines Planeten zu seiner schnellsten, d. h. das Intervall seines tiefsten Tones zum höchsten, kleine Unreinheiten abgesehen, bei den Planeten mit Ausnahme von Erde und Venus harmonisch.

Denn aus den tychonischen Beobachtungen ergeben sich nahezu folgende Verhältnisse:

Für Saturn $\frac{4}{5}$ = große Terz, für Jupiter $\frac{5}{6}$ = kleine Terz; für Mars $\frac{2}{3}$ = Quinte, für Erde $\frac{15}{16}$ = Halbton, für Venus $\frac{24}{25}$ = Diesis, für Merkur $\frac{5}{12}$ = Oktave mit kleiner Terz.

2) Sind auch die Extreme der täglichen Bewegung je zweier Planeten harmonisch. Diese Vergleichung kann auf doppelte Weise durchgeführt werden.

a) Man bestimmt das Intervall der langsamsten Bewegung eines oberen Planeten zur schnellsten des nächst unteren »divergierendes Intervall«.

b) Man bestimmt das Intervall der schnellsten Bewegung des oberen Planeten zur langsamsten des nächst unteren »konvergierendes Intervall«.

Für beide Arten von Intervallen erhält man wieder aus den tychonischen Beobachtungen nahezu harmonische Zahlen; dadurch ist es möglich, daß sämtliche Planeten zusammenklingen.

Durch die Harmonien in 1) ist, wie im vorigen Art. erwähnt wurde, die Exzentrizität, und durch diese die Form der Bahn bestimmt. Ebenso läßt sich aus dem Intervalle des Tones, welches ein Planet bei seiner Bewegung durchläuft, das Verhältnis seiner Entfernungen $r : r' = \sqrt{w' : w}$ bestimmen; man kann daher auch die Entfernung r in Teilen einer bestimmten r', etwa gleich der mittleren, angeben. Sind daher die Verhältnisse der mittleren Entfernungen der

Planeten zu irgend einer mittleren bekannt, so kann man die Entfernung r in Teilen dieser mittleren Entfernung angeben.

Aus den fünf regulären Körpern lassen sich die genauen Werte der Verhältnisse der mittleren Entfernungen nicht bestimmen, die wahren Werte folgen aus den Harmonien: es müssen sich daher aus den mittleren täglichen Winkelbewegungen der Planeten, welche zu den mittleren Entfernungen gehören, diese Verhältnisse bestimmen lassen. Dazu ist nötig, daß das Gesetz zwischen den mittleren täglichen Winkelbewegungen (oder Umlaufszeiten) und den mittleren Entfernungen bekannt ist; in diesem Gesetze ist die Verbindung der beiden Prinzipe des Weltbaues nach den fünf regulären Körpern und nach den Harmonien ausgedrückt.

Zunächst war es gewiß, daß die Umlaufszeit eines Planeten von seiner mittleren Entfernung abhängt; daß der größeren Umlaufszeit die größere Entfernung entspricht, daß jedoch dies Verhältnis kein einfaches ist, sondern das der Umlaufszeiten größer ist. Kepler erklärte dies dadurch, daß die Umlaufszeit des entfernteren Planeten einerseits durch den größeren Raum, den der Planet zu durchlaufen hat, andererseits durch die Abnahme der Sonnenkraft in der Entfernung vergrößert wird. Es war eine glückliche Idee, die ihn bestimmte, die verschiedenen Potenzen der Umlaufszeiten und mittleren Entfernungen miteinander zu vergleichen. Kepler spricht das gefundene Gesetz im 3. Kapitel des fünften Buches der Harmonien folgendermaßen aus: »Es ist ganz gewiß, daß das Verhältnis der periodischen Umlaufszeiten genau das ein- und einhalbfache*) des

*) Älterer Ausdruck für die $1\frac{1}{2}$te Potenz eines Verhältnisses.



Verhältnisses der mittleren Entfernungen der Planeten d. i. der Planetensphären selbst ist.«

60.

Durch Umkehrung der gefundenen Resultate erhält Kepler folgendes Axiom: Die Weltakkorde und die Harmonien sind der Zweck des Weltschöpfers, die Größe (bestimmt durch die fünf regulären Körper) und die Form (bestimmt durch die Exzentrizitäten) der Bahnen sind das Mittel dazu.

Diese ganze Untersuchung Keplers bezweckte eine Zusammenfassung des Sonnensystems als eines wohlgeordneten Ganzen d. i. als Kosmos, also eine Zurückführung der Elemente der Planeten und ihrer Bewegungen auf mathematische Verhältnisse. Von den Elementen waren für ihn die auf die Lage der Bahn und auf die Epoche bezüglichen durch den Zufall, die auf die Größe und Form der Bahn bezüglichen durch die Harmonien bestimmt. Diese Idee wird in folgender Weise verwirklicht:

Für einen einzelnen Planeten findet die Harmonie in den Punkten seiner Apsidenlinie statt; damit eine Gesamtharmonie möglich ist, durften für die einzelnen Planeten nur solche Harmonien gewählt werden, welche den fünf Körpern angepaßt sind, d. h. es mußten den Planeten bestimmte mittlere Bewegungen zugeteilt werden; diese hängen daher von den mittleren Entfernungen ab. Umgekehrt können aus dem Gesetze der Harmonien die mittleren Entfernungen und Exzentrizitäten bestimmt werden.[23])

Das Verständnis der keplerischen Gesetze erhielt sich nur in England, wo sie nicht nur durch neue Beobachtungen bestätigt wurden, sondern wo bereits Horrox (gest. 1641) eine Untersuchung über die infolge der allgemeinen

Anziehung verursachten Störungen anstellte. Durch Newtons Entdeckung der allgemeinen Anziehung fanden die keplerischen Gesetze einerseits ihren innern Zusammenhang, als auch andererseits die zur Darstellung der Planetenbewegung nötige Ergänzung. Am Kontinente wurden die von Kepler zur Erklärung der Erscheinung erdachten Kraftkreise zur Wirbeltheorie ausgebildet, welche Theorie sich bis Ende des achtzehnten Jahrhunderts erhielt.

Dritter Abschnitt.

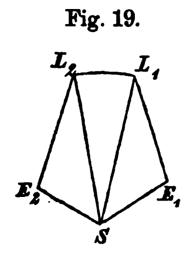
Zum Problem der Bahnbestimmung.

61.

Wie bereits im Art 57. erwähnt wurde, verdankt man Keplern die erste genauere Bestimmung der Bahnelemente der Erde und der fünf größeren Planeten. Diese Bestimmung war, nach der Erkenntnis der wahren Bewegungsgesetze, insofern von keiner großen Schwierigkeit, da man mit Zuziehung der ältesten Beobachtungen genaue Werte für die mittleren täglichen Bewegungen erhielt, und andererseits für die übrigen Elemente aus dem reichen Schatze der tychonischen Beobachtungen die zur Bestimmung eines jeden Elementes passendsten Beobachtungen ausgewählt werden konnten. Selbst die Entdeckung des Planeten Uranus (im Jahre 1781 durch W. Herschel) förderte das Problem der Bahnbestimmung der Planeten nicht weiter, da man vermöge der Kleinheit der Exzentrizität und der Neigung der Bahn durch die Voraussetzung einer kreisförmigen Bahn, deren Ebene mit der Ekliptik zusammenfällt, bereits hinreichend genäherte Elemente erhielt.

Man kann nämlich in diesem Falle aus zwei beobachteten Längen die Elemente: mittlere Entfernung und Epoche bestimmen.

Fig. 19.



Es seien (Fig. 19)
L_1, L_2 die Orte des Planeten,
E_1, E_2 die zugehörigen Orte der Erde,
S die Sonne.

Ist t die Zwischenzeit der beiden Beobachtungen, so ist die zugehörige mittlere Bewegung

$$=\frac{k\,t}{a^{\frac{3}{2}}}=\text{Winkel } L_1\,S\,L_2,$$

wo $a = SL_1 = SL_2$ die mittlere Entfernung bedeutet.

Aus den Dreiecken SE_1L_1, SE_2L_2 folgt, wenn $SE_1 = R_1$, Winkel $E_1L_1S = L_1$, $L_1E_1S = E_1$, u. s. w. und $E_1SE_2 = S$ gesetzt wird,

$$(1) \qquad \sin L_1 = \frac{R_1 \sin E_1}{a}, \qquad \sin L_2 = \frac{R_2 \sin E_2}{a};$$

$$(2) \qquad \frac{k\,t}{a^{\frac{3}{2}}} = S + E_1 + E_2 + L_1 + L_2 - 360^0.$$

Man muß nun die Größe a so bestimmen, daß den Gleichungen (1) und (2) genügt wird.

Für den Planeten Uranus wird diese Lösung dadurch vereinfacht, daß a gegen R_1 oder R_2 sehr groß ist; man kann daher in (1) statt der Sinusse die Bogen setzen, und erhält dadurch

$$L_1 = \frac{R_1 \sin E_1}{a \sin 1''}, \qquad L_2 = \frac{R_2 \sin E_2}{a \sin 1''}$$

$$\frac{k\,t}{a^{\frac{3}{2}}} = S + E_1 + E_2 - 360^0 + \frac{R_1 \sin E_1 + R_2 \sin E_2}{a \sin 1''},$$

oder, wenn

$$S + E_1 + E_2 - 360^0 = \alpha, \ \frac{R_1 \sin E_1}{\sin 1''} + \frac{R_2 \sin E_2}{\sin 1''} = \beta, \ a^{\frac{1}{2}} = x,$$

wobei α und k in Sekunden auszudrücken ist, gesetzt wird,

$$\alpha x^3 + \beta x = k t.$$

Vermittelst der *regula falsi* kann man diesen erhaltenen Wert x derart verbessern, daß er den Gleichungen (1) und (2) vollkommen genügt.

Ist a gefunden, so erhält man die Epoche aus dem Winkel $E_1 S L_1$ oder $E_2 S L_2$.

Die genauere Bahnbestimmung konnte man bis dahin aufschieben, wo man aus den häufigeren und entfernteren Beobachtungen die passendsten auswählen konnte. Diese Bestimmung wurde außerdem durch das Auffinden älterer Beobachtungen des Uranus erleichtert.

62.

Ungleich größere Schwierigkeiten verursachte die Bahnbestimmung des ersten Asteroiden Ceres. Dieser Planet wurde am 1. Januar 1801 von Piazzi in Palermo bei der Beobachtung von Fixsternen entdeckt und bis zum 11. Februar beobachtet. Hier handelte es sich zum ersten Male um die Lösung der Aufgabe: »Die Bahn eines Himmelskörpers aus Beobachtungen, die keinen großen Zeitraum umfassen, ohne jede hypothetische Voraussetzung zu bestimmen.«

Karl Friedrich Gauß (geb. 1777, gest. 1855), der sich bereits vor der Entdeckung der Ceres mit dem eben genannten Problem beschäftigt hatte, bestimmte nun für die Ceres eine Bahn, welche die ganze Reihe der Piazzischen Beobachtungen (andere waren nicht vorhanden) höchst befriedigend darstellte. Die erste heitere Nacht der nächsten Erscheinung, in der man den Planeten suchte, gab denselben an dem berechneten Orte.

Aus den ursprünglichen Methoden, welche Gauß zur Berechnung der Ceresbahn angewandt hatte, entwickelte sich infolge fortgesetzter Untersuchungen dessen »*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*«.

63.

Nicht geringer waren die Schwierigkeiten, welche sich vor der Aufstellung der Olberschen Methode der Bahnbestimmung der Kometen entgegenstellten. Obgleich man bei den Kometenbahnen (mindestens in erster Annäherung) mit der Parabel ausreicht — also ein Element weniger zu bestimmen hat —, so wird dieser Vorteil durch den Umstand, daß man, wegen der kurzen Sichtbarkeit dieser Himmelskörper, sich die Beobachtungen nicht willkürlich auswählen kann, sondern diejenigen benutzen muß, welche der Zufall darbietet, bei weitem aufgewogen. Man wurde daher bei den Kometen zu der unmittelbaren Lösung des Problems, »eine parabolische Bahn zu bestimmen«, gedrängt.

Die erste Lösung des eben genannten Problems gab Newton, wodurch man jedoch erst (auf dem Wege der Konstruktion) nach ziemlich mühsamen und zahlreichen Versuchen die gesuchten Elemente erhält. Die direkte analytische Lösung würde zu ganz unauflösbaren Gleichungen führen; man zog es daher vor, auf indirektem Wege die Aufgabe analytisch zu lösen. La Caille bediente sich des Verfahrens, für drei Beobachtungen durch Versuche die beiden äußersten Distanzen des Kometen von der Erde derart zu bestimmen, daß der mittleren Beobachtung durch die daraus erhaltenen Elemente genügt wird. Das ziemlich mühsame Verfahren der Bestimmung zweier Unbekannten suchten Boscovich, Lambert, Euler durch Voraussetzungen über die Bewegung der Kometen zu vereinfachen:

1) daß das Stück der Kometenbahn zwischen den äußersten Bewegungen geradlinig sei und vom Kometen gleichförmig durchlaufen werde; 2) daß die Sehne vom mittleren Radiusvektor im Verhältnisse der Zeiten geschnitten werde.[24]) Durch diese Voraussetzungen wurde allerdings die Aufgabe auf die Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten zurückgeführt; allein entweder waren die erhaltenen Elemente zu ungenau oder die Lösung dieser Gleichung noch immer sehr schwierig. Selbst die vollkommeneren Lösungen von von La Grange und La Place erforderten so mühsame Rechnungen, daß für die praktische Durchführung wenig gewonnen war. Erst durch Wilhelm Olbers (geb. 1758, gest. 1840) wurde vermittelst der in Art. 20. erwähnten Voraussetzungen jene Lösung der Aufgabe gegeben, welche in theoretischer und praktischer Hinsicht jeder Forderung genügte, und die bis jetzt noch nicht durch eine vollkommenere Methode verdrängt wurde.

Anhang.

Anmerkungen und Zusätze.

---

1) S. 5. Um einen in Teilen des Halbmessers gegebenen Winkel $= x$ in Graden $= x^0$ auszudrücken, verfährt man auf folgende Art:

$$x : x^0 = 2\pi : 360^\circ,$$

also $x = \frac{2\pi}{360} \cdot x^0 = \frac{2\pi}{360 \cdot 60} \cdot x' = \frac{2\pi}{360 \cdot 60^2} \cdot x''$, wo x^0, x', x'' der Winkel ist, resp. in Graden, Minuten, Sekunden ausgedrückt. $\frac{2\pi}{360 \cdot 60^2}$ ist der in Teilen des Halbmessers ausgedrückte Bogen für den Centriwinkel $= 1''$, dieser Bogen ist sehr nahe $= \sin 1''$. Es ist daher

$$x = x'' \cdot \sin 1'', \quad x'' = x : \sin 1'' = 206264.81\, x.$$

In der Gleichung $M = E - e \sin E$ sind M und E in Teilen des Halbmessers ausgedrückt. Um diese Gleichung auf das Gradmaß zu beziehen, denke man sich M und E in Sekunden beibehalten und e in Sekunden ausgedrückt, was durch Multiplikation mit der Zahl 206264.81 geschieht. Um M unmittelbar in Sekunden zu erhalten, braucht man nur in dem Ausdrucke für $M = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\, t$ die Zahl k in Sekunden auszudrücken, wodurch man

$$k = 3548''.18761, \quad \log k = 3.5500066$$

erhält.

---

2) S. 5. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze wird die Wechselwirkung der Masse m_1 auf die in der Entfernung r befindliche Masse m_2 ausgedrückt durch

$$-\frac{Cm_1 m_2}{r^2},$$

die relative Wirkung der Masse m_1 auf m_2 durch

$$-\frac{C(m_1+m_2)m_2}{r^2},$$

wo C eine Konstante ist. Man kann durch passende Wahl der Masseneinheit diese Konstante auf Eins bringen. Ist nämlich C von 1 verschieden, so nehme man das $\sqrt{C}$-fache der (früheren) Masseneinheit als neue Masseneinheit, wodurch die neuen Maßzahlen von m_1 und m_2 in das $1:\sqrt{C}$-fache übergehen. Bedeuten m_1 und m_2 diese neuen Maßzahlen, so wird die relative Wechselwirkung der Masse m_1 auf die Masse m_2 ausgedrückt durch

$$-\frac{(m_1+m_2)\,m_2}{r^2},$$

die beschleunigende Kraft also durch

$$-\frac{(m_1+m_2)}{r^2}.$$

Ist $m_1 = M$ die Masse der Sonne, $m_2 = Mm$ die Masse eines Planeten, so ist

$$m_1 + m_2 = M(1+m).$$

Aus der Theorie der Bewegung eines Planeten um die Sonne folgt, daß

$$\sqrt{M} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{U\sqrt{1+m}}$$

für alle Planeten konstant ist. Die Bedeutung des Wertes dieser Konstanten ist die Quadratwurzel der Sonnenmasse.

Die beschleunigende Kraft der Sonnenmasse ist dann

$$\frac{k^2(1+m)}{r^2}.$$

Nimmt man als Zeiteinheit $\frac{1}{k}$ mittlere Sonnentage, wo

$$\frac{1}{k} = 58.13244088,$$

so wird die beschleunigende Kraft der Sonne

$$\frac{1+m}{r^2},$$

also gleich Eins, wenn m vernachlässigt werden kann und $r = 1$ gesetzt wird.

---

3) S. 5. Neue genauere Bestimmungen von U und m der Erde würden einen genaueren Wert von k ergeben; so ist nach Newcomb

Dauer des siderischen Jahres 365.25636042 mittlere Tage,

also kleiner;

$$\text{Masse Erde} + \text{Mond} = \frac{1}{329390},$$

also größer als der Gaußsche Wert. Dennoch wird in den astronomischen Rechnungen die Gaußsche Konstante beibehalten. Deren Wert bezieht sich dann auf einen idealen Planeten, dessen mittlere Entfernung von der Sonne als Längeneinheit angenommen wird, dessen Umlaufszeit und Masse gleich jenen der Gaußschen Erdwerte sind; für die mittlere Entfernung a der Erde folgt dann nach den obigen genaueren Bestimmungen $a = 1.0000000680$. Bauschinger nimmt in seinen Tafeln $a = 1.00000010$.

---

4) S. 6. Zur Auflösung der in der theoretischen Astronomie vorkommenden Gleichungen vom höheren Grade oder transcendenten werden hauptsächlich die *regula falsi* und die Newtonsche Methode benutzt. Beide beruhen darauf, daß

für die stetige Funktion X von x, deren Wurzeln zu bestimmen sind, der Unterschied der Funktionswerte $X(b) - X(a)$ dem Unterschiede $b - a$ proportional gesetzt werden kann, wenn $b - a$ klein ist.

In der Regel ist bei einer Gleichung nur eine Wurzel — bei mehreren Gleichungen nur ein System zusammengehöriger Werte der Unbekannten —, deren Wert beiläufig bekannt ist, zu bestimmen.

1. *Regula falsi.* Ist $X = 0$ eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten x, w eine bestimmte Wurzel, a, a' zwei Näherungswerte von w, so sei für

$$\begin{array}{ll} x = w & X = 0 \\ x = a & X = A \\ x = a' & X = A'. \end{array}$$

Sind $a - w$, $a' - w$ klein, so gilt näherungsweise

$$a - w : a' - w = A : A',$$

woraus

$$w = a - \frac{A(a - a')}{A - A'} = a' - \frac{A'(a' - a)}{A' - A} \tag{1}$$

folgt. Es ist vorteilhaft, die Näherungen a und a' so zu wählen, daß die Wurzel w zwischen dieselben fällt.

In der Anwendung findet häufig der Fall statt, daß

$$X = c + f(x) - x$$

ist, wo $f(x)$ die Unbekannte x enthält, dabei aber klein ist und für geringe Änderungen von x sich wenig ändert. In diesem Falle ist es zweckmäßig, das obige Verfahren etwas zu modifizieren.

Sind nämlich a und a' zwei Näherungswerte von w, so sind

$$\alpha = c + f(a), \qquad \alpha' = c + f(a')$$

zwei genauere Werte von w, und $A = \alpha - a$, $A' = \alpha' - a'$ die Fehler.

Aus

$$a - w : a' - w = \alpha - a : \alpha' - a'$$

folgt

$$\alpha - w : \alpha' - w = \alpha - a : \alpha' - a',$$

und daraus folgt

(2) $$w = \alpha - \frac{A(\alpha - \alpha')}{A - A'} = \alpha' - \frac{A'(\alpha' - \alpha)}{A' - A}.$$

Für a' nimmt man in diesem Falle gewöhnlich die Größe α, dann ist

$$A = \alpha - a, \quad A' = \alpha' - \alpha$$

und

(3) $$w = \alpha' - \frac{(\alpha' - \alpha)^2}{\alpha' - \alpha - (\alpha - a)}.$$

2. Statt der *regula falsi* kann man auch die Newtonsche Methode anwenden. Setzt man

$$\omega = a + h,$$

so ist näherungsweise

$$X(w) = X(a) + X'(a)h = 0,$$

(4) $$h = -\frac{X(a)}{X'(a)}, \quad w = a - \frac{X(a)}{X'(a)}$$

Für die Gleichung (11) des Art. 16. erhält man, diese Methode auf das Beispiel des Art. 18. angewendet,

$$X = \lambda - \frac{\mu}{r'^3} - x', \quad X' = -\left(1 - \frac{3\,\mu\, x'}{r'^5}\right)$$

$$a = 2.054, \quad X(a) = -0.0066, \quad X'(a) = -0.8245$$

$w = 2.04600$ als genaueren Wert.

Wiederholt man mit diesem Werte als a die Rechnung, so wird

$$X(a) = -0.000078, \quad X'(a) = -0.8034$$
$$w = 2.045903.$$

3. Mit erhöhter Genauigkeit kann h aus

$$X(w) = X(a) + X'(a)\,h + X''(a)\frac{h^2}{2} = 0$$

bestimmt werden. Zur Auflösung dieser Gleichung mag bemerkt werden: Die Wurzeln der Gleichung

$$a h^2 + b h + c = 0,$$

wo c gegen b klein ist,

$$h = -\frac{b \pm b\sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}}{2a}$$

entwickle man näherungsweise nach

$$\sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} = 1 - \frac{2ac}{b^2} - 2\left(\frac{ac}{b^2}\right)^2 - \cdots,$$

$$h_1 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}, \quad h_2 = -\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{ac^2}{b^3},$$

wovon für die vorliegende Aufgabe nur h_1 (die absolut kleine Wurzel) zu brauchen ist, die auch aus der obigen Gleichung erhalten wird, indem man

$$h = -\frac{c}{b} - \frac{ah^2}{b}$$

setzt und in das zweite Glied für h den Näherungswert $c:b$ einsetzt*).

Auf die gegebene Gleichung angewendet, erhält man

$$h = -\frac{X(a)}{X'(a)} - \frac{X''(a)}{X'(a)}\frac{h^2}{2},$$

oder $h = h_0 + h'$

$$h_0 = -\frac{X(a)}{X'(a)}, \quad h' = -\frac{X''(a)\frac{h_0^2}{2}}{X'(a)}.$$

4. Diese beiden Methoden lassen sich auch auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten anwenden.

Sind zur Bestimmung von x, y, z drei Gleichungen

(1) $$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

*) Die wiederholte Einsetzung des erhaltenen Wertes von h liefert die höheren Potenzen der Entwicklung der obigen Quadratwurzel.

gegeben, sind x_0, y_0, z_0 zusammengehörige Näherungswerte von x, y, z, so setze man

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta;$$

führt man diese Werte in die drei Gleichungen (1) ein, so erhält man

$$(2)\quad \begin{aligned} 0 &= U_0 + A\xi + B\eta + C\zeta + \\ 0 &= V_0 + A'\xi + B'\eta + C'\zeta + \\ 0 &= W_0 + A''\xi + B''\eta + C''\zeta + \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Glieder mit} \\ \xi^2, \eta^2, \zeta^2 \\ \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta. \end{array} \right.$$

U_0, V_0, W_0 sind die Werte von U, V, W; A, B, C, .. deren partielle Differentialquotienten für das Wertsystem x_0, y_0, z_0.

Vernachlässigt man in den Gleichungen (2) die Glieder zweiter Ordnung, so erhält man für ξ, η, ζ Näherungswerte ξ_0, η_0, ζ_0. Berechnet man mit diesen die Glieder zweiter Ordnung in (2), so seien U', V', W' deren Beträge. Bestimmt man wieder aus den Gleichungen (2) die Werte von ξ, η, ζ, indem man die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt und U', V', W' statt U_0, V_0, W_0 setzt, sind ξ', η', ζ' die daraus erhaltenen Werte, so sind

$$\xi = \xi_0 + \xi', \quad \eta = \eta_0 + \eta', \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta'$$

die genaueren Werte von ξ, η, ζ.

Bei dieser Bestimmung wird der Nenner der Unbekannten nur einmal berechnet, für die Berechnung der Zähler können Teile der Rechnung für die beiden Systeme der Unbekannten beibehalten werden.

Mit den erhaltenen Werten $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$ als verbesserte Werte x_0, y_0, z_0 wird die Rechnung wiederholt. Diese Wiederholung wird so oft vorgenommen, bis die Werte ξ, η, ζ verschwindend klein ausfallen. Bei den späteren Wiederholungen genügt es in der Regel, die Größen U_0, V_0, W_0 neu zu rechnen, die früheren Werte der

Koeffizienten A, B, C, . . können beibehalten und die Gliederzweiter Ordnung vernachlässiget werden. Die Größen U_0, V_0, W_0 sind bei den Wiederholungen in der Regel genau — etwa mit siebenstelligen Tafeln — zu berechnen, für die Koeffizienten A, B, C, . . und die Glieder zweiter Ordnung genügen fünfstellige, ja sogar vierstellige Tafeln.

---

5) S. 13. Ist h klein, so läßt sich die positive Wurzel y der kubischen Gleichung γ) durch folgende Reihe darstellen

$$y = 1 + \tfrac{10}{9}\, h - \tfrac{110}{81}\, h^2 + \tfrac{2410}{729}\, h^3,$$

$$\log y = [9.683542]h - [9.93341]h^2 + [0.3281]h^3,$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Man setzt y in der Form

$$y = 1 + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \cdot\cdot$$

voraus und bestimmt die Koeffizienten A, B, C, . . derart, daß der Gleichung γ) identisch genügt wird. Für größere Werte von h, etwa von 0.02 an, kann man sich nach dieser Reihe Näherungswerte von y verschaffen, und dann vermittelst der *regula falsi* den genauen Wert aus der kubischen Gleichung bestimmen.

---

6) S. 17. Näherungsweise kann diese Aufgabe auf folgende Art gelöst werden, wobei kt und e als kleine Größen erster Ordnung angesehen werden.

Entwickelt man $rr' \sin(v' - v)$ und drückt $r \sin v$, . . durch die exzentrische Anomalie aus, so wird

$$rr' \sin(v' - v) = a^2 \sqrt{1 - e^2}\,(\sin(E' - E) - e(\sin E' - \sin E))$$
$$= a^2 \sqrt{1 - e^2}\,(M' - M - [E' - E - \sin(E' - E)]),$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$rr' \sin(v'-v)$$
$$= a^2\sqrt{1-e^2}(M'-M)\left(1-\tfrac{1}{6}(M'-M)^2\left(1+3e\cos\frac{E'+E}{2}\right)\right).$$

Aus $r:a = 1-e\cos E$ folgt näherungsweise

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \frac{1}{(1-e\cos E)^3} = 1+3e\cos E;$$

damit wird bis auf einen Fehler 5ter Ordnung

$$rr'\sin(v'-v) = \sqrt{p}\,kt\left(1-\frac{k^2t^2}{6r^3}\right),$$

wo in r^3 statt r auch r' oder ein Mittelwert zwischen r, r' gesetzt werden kann.

Dieselbe Formel erhält man durch die Voraussetzung einer kreisförmigen Bewegung mit dem mittleren Radius $r_0 = \sqrt{rr'}$.

Der doppelte Sektor $= \sqrt{p}\,kt$ wird dann $r_0^2 \cdot 2f$, die doppelte Dreiecksfläche $r_0^2 \sin 2f$, deren Verhältnis also, wegen

$$\frac{2f}{\sin 2f} = 1+\tfrac{1}{6}(2f)^2, \quad 2f = \frac{kt}{r_0^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{\sqrt{p}\,kt}{r_0^2 \sin 2f} = 1+\frac{1}{6}\frac{(kt)^2}{r_0^3}.$$

Setzt man

$$\frac{rr'\sin(v'-v)}{kt} = \sqrt{p'},$$

so wird

$$\sqrt{p} = \sqrt{p'}\left(1+\frac{\sqrt{rr'}\sin(v'-v)^2}{6p'}\right)$$
$$p = p' + \tfrac{1}{3}\sqrt{rr'}\sin(v'-v)^2,$$

welche beide letzten Formeln mit den Eulerschen übereinstimmen. Für das obige Beispiel erhält man

log. p resp. 0.3954878 und 0.3954854.

7) S. 21. Bei Anwendung der Hyperbelfunktionen zur Lösung von Aufgaben bezüglich der Bewegung in einer Hyperbel erhält man ganz analoge Ausdrücke jenen des ersten und zweiten Abschnittes für die Ellipse.

1. Als Hyperbelfunktionen werden definiert:

$$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdot\cdot,$$

$$\mathfrak{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot\cdot,$$

oder

$$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{1}{i} \sin xi, \quad \mathfrak{Cos}\, x = \cos xi.$$

Diese Funktionen haben daher die Periode $2\pi i$.

$$\mathfrak{Tan}\, x = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cos}\, x}, \quad \text{u. s. w.}$$

Daraus folgt: Ist x positiv, so ist $\mathfrak{Sin}\, x$ positiv und wächst mit x von 0 bis ∞. Ist x positiv oder negativ, so ist $\mathfrak{Cos}\, x$ positiv und wächst mit (absolut) x von 1 bis ∞.

Für große positive Werte von x wachsen $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ wie $\frac{1}{2} e^x$.

$$\mathfrak{Sin}\,(x \pm y) = \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Cos}\, y \pm \mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Sin}\, y$$

$$\mathfrak{Cos}\,(x \pm y) = \mathfrak{Cos}\, x\, \mathfrak{Cos}\, y \pm \mathfrak{Sin}\, x\, \mathfrak{Sin}\, y,$$

also

$$1 = \mathfrak{Cos}\, x^2 - \mathfrak{Sin}\, x^2.$$

Ist $\mathfrak{Sin}\, x = z$, so heisst $x = \mathfrak{Arc}\, \mathfrak{Sin}\, z$ u. s. w.

$$\mathfrak{Arc}\, \mathfrak{Sin}\, x = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$\mathfrak{Arc}\, \mathfrak{Cos}\, x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\mathfrak{Arc}\, \mathfrak{Tan}\, x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

$$d\,\mathfrak{Sin}\,x = \mathfrak{Cos}\,x\,dx, \quad d\,\mathfrak{Cos}\,x = \mathfrak{Sin}\,x\,dx$$

$$d\,\mathfrak{Tan}\,x = \frac{dx}{\mathfrak{Cos}\,x^2}, \quad d\,\mathfrak{Cotg}\,x = -\frac{dx}{\mathfrak{Sin}\,x^2}$$

$$d\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\,x = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad d\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cos}\,x = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$d\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tan}\,x = \frac{dx}{1-x^2}, \quad d\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cotg}\,x = -\frac{dx}{x^2-1}.$$

Wird

$$\mathfrak{Sin}\,x = \tan y, \text{ also } \mathfrak{Cos}\,x = \frac{1}{\cos y}, \ \mathfrak{Tan}\,x = \sin y$$

gesetzt, so heißt y der **Lambert'sche transcendente Winkel.**

Aus

$$e^x = \mathfrak{Sin}\,x + \mathfrak{Cos}\,x = \frac{\sin y + 1}{\cos y}$$

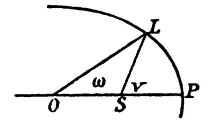
$$= \frac{\sin y + \sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$$

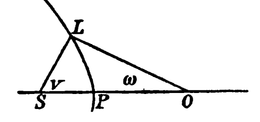
folgt

$$x = \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right).\text{*)}$$

2. Der Nachweis der Analogie der Lösungen der Bewegungsaufgaben für die Ellipse und Hyperbel wird auf

Fig. 20.





folgende Art geliefert: Ist (Fig. 20) O der Mittelpunkt des Kegelschnittes, P das Perihel, S der Brennpunkt (mit der

*) Die Logarithmen in diesen Formeln sind selbstverständlich natürliche.

Sonne), L der Ort des Himmelskörpers, so ist mit Rücksicht auf das Vorzeichen der Flächen

$$\text{Sektor } SPL = \text{Sektor } OPL - \text{Dreieck } OSL.$$

Setzt man

$$OL = u, \quad \text{Winkel } POL = \omega,$$

so ist der doppelte Sektor OPL

$$S = \int u^2 \, d\omega,$$

wo für die Ellipse oder Hyperbel

$$\frac{u^2 \cos \omega^2}{a^2} \pm \frac{u^2 \sin \omega^2}{b^2} = 1,$$

also

$$S = ab \int \frac{dz}{1 \pm z^2}, \qquad z = \frac{a}{b} \tan \omega \,.$$

Für die Ellipse setze man

$$z = \tan E,$$

dann wird

$$S = abE;$$

und aus der Gleichung der Ellipse (indem man $u^2 \cos \omega^2$, $u^2 \sin \omega^2$ bestimmt)

$$u \cos \omega = a \cos E, \quad u \sin \omega = b \sin E,$$

woraus unmittelbar

$$r \cos v = a \cos E - ae, \quad r \sin v = b \sin E$$

folgt.

Da die doppelte Dreiecksfläche

$$OSL = ae \,.\, u \sin \omega = abe \sin E$$

ist, so folgt für die doppelte Fläche des Sektors SPL

$$ab\,(E - e \sin E).$$

Aus dem Ausdrucke $k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}\,t$ für die doppelte Fläche des Sektors PSL erhält man, wenn die Masse m vernachlässigt wird,

$$k\sqrt{p}\,t = \frac{kb}{\sqrt{a}}\,t;$$

es ist daher

$$E - e \sin E = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Für die Hyperbel setze man

$$x = \mathfrak{Tan}\,E,$$

dann wird

$$\begin{aligned} S &= ab\,E, \\ u \cos\omega &= a\,\mathfrak{Cos}\,E, \\ u \sin\omega &= b\,\mathfrak{Sin}\,E = r \sin v\,, \\ r \cos v &= a\,(e - \mathfrak{Cos}\,E). \end{aligned}$$

Für die Hyperbel ist es zweckmäßiger, die Flächen, sowie die Größen ω, E, v für positive Ordinaten von L positiv, für negative Ordinaten negativ zu nehmen. In diesem Sinne wird die obige Flächengleichung

Sektor SPL = Dreieck OSL — Sektor OPL,

woraus dann (analog wie bei der Ellipse) für den doppelten Sektor SPL

$$ab\,(e\,\mathfrak{Sin}\,E - E),$$

$$e\,\mathfrak{Sin}\,E - E = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}$$

folgt.

Die Größen ω, v, E werden positiv und negativ von 0 bis α, von 0 bis $180^\circ - \alpha$, von 0 bis ∞ genommen, wo α den spitzen Winkel, für welchen $\cos\alpha = 1 : e$, bedeutet.

Aus der Gleichung zwischen r, E und v folgt

$$\mathfrak{Cos}\,E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}, \qquad r = a\,(e\,\mathfrak{Cos}\,E - 1)$$

$$\sqrt{r}\,\sin\tfrac{1}{2}\,v = \sqrt{a\,(e+1)}\;\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,E$$

$$\sqrt{r}\,\cos\tfrac{1}{2}\,v = \sqrt{a\,(e-1)}\;\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,E$$

Auch die Gleichungen jener für die Ellipse gegebenen Lösung der fundamentalen Aufgabe des Art. 6. des zweiten Abschnittes erleiden nur jene Änderungen, welche die geringen Unterschiede der Eigenschaften der Kreis- und Hyperbelfunktionen bedingen. Die Gleichungen (5) und (5*), (7) und (7*) dieses Art. werden für die Hyperbel

$$a = \frac{2\,(l - \mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}{\mathfrak{Sin}\,g^2}$$

$$a = -\frac{2\,(L + \mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}{\mathfrak{Sin}\,g^2}$$

$$m = (l - \mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (l - \mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2g - 2g}{\mathfrak{Sin}\,g^3}$$

$$M = -(L + \mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (L + \mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2g - 2g}{\mathfrak{Sin}\,g^3},$$

wo l, m; L, M dieselbe Bedeutung haben wie in Art. 6.; das doppelte Zeichen in den beiden letzten Gleichungen fällt weg, da $\mathfrak{Sin}\,g$ immer positiv ist, wenn man, wie dies gewöhnlich geschieht, die Neigung der Bahn von 0 bis 180° zählt, wodurch die Unterscheidung von direkter und retrograder Bewegung entfällt.

Setzt man

$$\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}g^2 = x, \quad \frac{\mathfrak{Sin}\,2g - 2g}{\mathfrak{Sin}\,g^3} = Z,$$

so erhält man für die Entwicklung von Z und für die Auflösung der obigen Gleichungen in x Ausdrücke, die aus jenen des Art. 6. hervorgehen, indem man x mit $-x$ vertauscht. Die übrigen Formeln dieses Artikels bleiben unverändert.

3. Für $a = b$ wird $E = \omega$; die Ellipse ist dann eine Kreislinie, die Hyperbel gleichseitig. Setzt man überdies $a = 1$, so werden die Koordinaten des Punktes L

Ellipse	Hyperbel
$x = \cos\omega$	$x = \text{Cos}\,\omega$
$y = \sin\omega$	$y = \text{Sin}\,\omega$

$$S = \omega.$$

Die Hyperbelfunktionen $\text{Cos}\,\omega$ und $\text{Sin}\,\omega$ werden in analoger Weise an der gleichseitigen Hyperbel $a = 1$ versinnlicht, wie die Kreisfunktionen $\cos\omega$ und $\sin\omega$ an einem Kreise mit dem Radius 1; dabei bedeutet ω den doppelten Sektor POL.

Aus $x^2 - y^2 = 1$ folgt, daß $1, y, x$ als die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks erscheinen, wo der der Ordinate gegenüberliegende spitze Winkel der Lambertsche transcendente Winkel ist.

4. Von den Tafelwerken über Hyperbelfunktionen mögen erwähnt werden:

A. Forti, »*Tavole dei logaritmi de' numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche*« *(Torino — Firenze — Milano, 1870)*. Links die siebenstelligen Logarithmen der Kreisfunktionen mit dem Argumente φ^0, rechts die der Hyperbelfunktionen, wo $\tan\varphi = \sin\tau = \text{Tan}\,\omega$ gesetzt ist, τ der Lambertsche transcendente Winkel ist; außerdem ist links φ, in Teilen des Halbmessers, rechts ω und $\log\omega$ angesetzt. Die wenigen Zahlen, die der Verfasser prüfte, waren meistens in der letzten Stelle fehlerhaft. In seinen sechsstelligen »*Nuove tavole delle funzioni iperboliche*« *(Roma, 1892)* gibt er für die Funktionen

$$\text{Sin}\,\omega,\ \text{Cos}\,\omega,\ \text{Tan}\,\omega,$$

mit ω als Argument, auf der linken Seite die gemeinen Logarithmen, auf der rechten deren Zahlenwerte und überdies den Lambertschen transcendenten Winkel. Sonderbarerweise verbürgt der Autor selbst für seine Zahlen im allgemeinen nur die fünfte Stelle.

E. Lampe hat auf Grundlage einer sorgfältigen Prüfung dieses Tafelwerkes (»Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin im Jahre 1897«) nachgewiesen, daß die sechste Stelle als unsicher zu betrachten ist.

Dr. W. Ligowski gibt in seinen »Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen« (Berlin, 1890) diese Werte mit Wechsel des Intervalles und der Anzahl der Stellen. Mit Benutzung des zum Argumente zugehörigen, auf zwei bez. drei Decimalstellen der Sekunde angegebenen Lambertschen transcendenten Winkels lassen sich auch die siebenstelligen Logarithmen der Hyperbelfunktionen ermitteln.

Die Auflösung der Aufgaben zur Bestimmung eines Hyperbelortes erfordert mittels dieser Tafeln kaum mehr Zeit als die eines Ortes in einer Ellipse. Für die Bestimmung der Größe E aus der mittleren Anomalie M wird zunächst mittels der Tafeln der Hyperbelfunktionen S. 58 u. ff. fast ohne Rechnung für den Wert E die Stelle zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tafelwerten ermittelt und daraus mittelst *regula falsi* E auf vier Decimalstellen genau erhalten. Die Verbesserung dieses Wertes E_0 wird dann am leichtesten nach der Newtonschen Methode durchgeführt. Aus den Tafeln bestimmt man den genauen Wert des zu E_0 gehörigen transcendenten Winkels, rechnet damit

genau $A = e \,\mathfrak{Sin}\, E_0 - E_0 - M$

näherungsweise $B = e \,\mathfrak{Cos}\, E_0 - 1$,

dann ist

$$E_0 - \frac{A}{B}$$

der verbesserte Wert von E. Für die weiteren Daten der Ortsbestimmung kann auch der verbesserte Wert des transcendenten Winkels benutzt werden.

8) S. 30. Die Koordinaten der drei heliozentrischen Orte genügen der Gleichung der Bahnebene, also Gleichungen

$$Ax + By + Cz = 0$$
$$Ax' + By' + Cz' = 0$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

Bestimmt man aus zwei derselben die Verhältnisse $A : C$, $B : C$ und setzt diese Werte in die dritte, so erhält man nach x, x', x'' geordnet

$$x(y''z' - y'z'') - x'(y''z - yz'') + x''(y'z - yz') = 0.$$

Nun ist $y''z' - y'z''$ die doppelte Projektion des Dreiecks $SL'L''$ auf die yz-Ebene, u. s. w. Dividiert man diese Gleichung durch den Kosinus des Neigungswinkels der Bahnebene mit der yz-Ebene, so erhält man

$$nx - n'x' + n''x'' = 0.$$

Ebenso erhält man die beiden anderen Gleichungen, wenn man nach y, y', y'' und z, z' z'' ordnet.

---

9) S. 36. Über die Genauigkeit der Größen P und Q.

1. Zu dieser theoretischen Fehlerbestimmung, wie sie Gauß gegeben hat, mag bemerkt werden: Zwei kleine (oder große) Größen derselben Ordnung haben eine endliche Zahl als Verhältnis. Ist x eine kleine Größe erster Ordnung, so ist ax^n eine kleine Größe der $n$ten Ordnung, wenn a endlich ist. Die Ordnung der Summe oder Differenz zweier kleiner Größen verschiedener Ordnung wird durch die geringere Ordnung der beiden Größen bestimmt. Die Ordnung des Produktes oder Quotientens zweier kleiner Größen ist die Summe oder Differenz der Ordnungszahlen der beiden Größen.

Ist $U = u + u'$, $V = v + v'$, wo u und v Näherungswerte von U, V sind, also u', v' deren Fehler; so ist der Fehler

$$UV - uv = uv' + vu' + u'v' \text{ nahe } = uv' + vu';$$

wenn man das sehr kleine Produkt $u'v'$ der Fehler vernachlässigt.

Die Ordnungszahl des Fehlers des Produktes UV, wenn dafür uv gesetzt wird, ist daher durch die Ordnungszahl von $uv' + vu'$ bestimmt.

Wendet man diesen Satz auf

$$UV = \frac{bn + dn''}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n'}$$

an, so ist $U = \frac{bn + dn''}{n + n''}$ eine kleine Größe der -2ten Ordnung, der Fehler v' eine Größe der vierten Ordnung, also uv' eine kleine Größe der zweiten Ordnung. $V = \frac{n + n''}{n'}$ ist von der nullten Ordnung, der Fehler u' von der ersten Ordnung, also das Produkt vu' von der ersten Ordnung. Der Fehler von UV ist daher von der ersten Ordnung, da die Summe von kleinen Größen erster und zweiter Ordnung eine Größe erster Ordnung ist.

Bei Bahnbestimmungen werden als kleine Größen (eigentlich Zahlen) erster Ordnung die in Teilen des Halbmessers ausgedrückten Differenzen der Anomalien der Orte des Himmelskörpers und die Exzentrizität der Bahn vorausgesetzt. Bei Distanzen werden die Verhältnisse derselben zu einer mittleren des Himmelskörpers von der Sonne in Betracht gezogen.

Diese theoretische Fehlerschätzung von $\varrho' : \cos\beta'$ findet in der Praxis glücklicherweise nicht statt, denn sonst wäre die Bahnbestimmung eines Asteroiden eine sehr mühsam

ausführbare Rechnung. Diese scheinbare Nichtübereinstimmung von Theorie und Praxis in der Ordnungsbestimmung des Fehlers von $\varrho' : \cos\beta'$ rührt daher, daß die Ordnungszahl einer kleinen Größe durch einen beigefügten Faktor $a < 1$ geändert werden kann, und die Differenz zweier kleiner Größen derselben Ordnung eine Größe höherer Ordnung sein kann.

2. Übrigens läßt sich auch in der ersten Hypothese für die Größe P fast ohne Nebenrechnung das nächste Glied (höherer Ordnung) berücksichtigen.

Für den Unterschied S. 35

$$\frac{(b-d)\,\vartheta\,\vartheta''\,(y''-y)}{(\vartheta+\vartheta'')\,(y''\,\vartheta+y\,\vartheta'')}$$

erhält man einen Näherungwert, indem man im Zähler

$$y''=1+\tfrac{1}{6}\frac{\vartheta''^2}{r'^3},\qquad y=1+\tfrac{1}{6}\frac{\vartheta^2}{r'^3}$$

setzt, im Nenner

$$y''=y=1.$$

Damit wird dieser Unterschied

$$\tfrac{1}{6}\,\frac{(b-d)\,\vartheta\,\vartheta''(\vartheta''-\vartheta)}{\vartheta'\,r'^3};$$

ist also verschwindend, wenn ϑ nahezu $= \vartheta''$ ist, was in der Praxis, wo für eine Bahnbestimmung meistens eine Auswahl von Beobachtungen vorhanden ist, häufig stattfindet. Für gewöhnlich kann man $\vartheta''-\vartheta$ als mindestens von der zweiten Ordnung ansehen, wenn ϑ und ϑ'' von der ersten Ordnung vorausgesetzt werden. Diese Berücksichtigung ist gleichwertig mit der Annahme, daß man in der Gleichung (9) für P den Näherungswert

$$P=\frac{\vartheta''}{\vartheta}\left(1-\tfrac{1}{6}\frac{(\vartheta''-\vartheta)\,\vartheta'}{r'^3}\right)$$

verwendet und in der dadurch für $\varrho' : \cos\beta'$ erhaltenen

Gleichung die Größen mit $(\vartheta\vartheta'')^2 \frac{\vartheta''-\vartheta}{\vartheta'}$ und noch höherer Ordnung vernachlässigt.

Die Abweichung des Korrektionsfaktors für P

$$1-\frac{1}{6}\frac{(\vartheta''-\vartheta)\,\vartheta'}{r'^3}$$

von der Einheit ist von der Ordnung drei, wenn $\frac{\vartheta''-\vartheta}{r'^{\frac{3}{2}}}$ von der Ordnung zwei vorausgesetzt wird und der Faktor $\frac{1}{6}$ nicht berücksichtigt wird, von der Ordnung vier, wenn $\frac{1}{6}$ als klein erster Ordnung vorausgesetzt wird, was bei Asteroiden bereits bei Zwischenzeiten von 40 Tagen gestattet ist.

3. Mit einer fünfstellig auszuführenden Nebenrechnung, die dann ohnedies größtenteils für die Aberrationskorrektur verwendet wird, lassen sich auch in der ersten Hypothese die nächsten Glieder höherer Ordnung von P und Q berücksichtigen*).

Einschließlich Glieder vierter Ordnung ist (Note 5)

$$y = 1 + \tfrac{10}{9}h - \tfrac{110}{81}h^2,$$

$$h = \frac{\frac{6}{5}m^2}{1+\frac{6}{5}l} = \tfrac{6}{5}m^2\left(1-\tfrac{6}{5}l\right), \quad h^2 = \tfrac{36}{25}m^4,$$

$$m^2 = \frac{\vartheta^2}{8\cos f^3\,(rr')^{\frac{3}{2}}}, \quad l = \sin\tfrac{1}{2}f^2.$$

Betrachtet man die Bewegung des Himmelskörpers als kreislinig vom Radius $r_0 = \sqrt{rr'}$, so ist

$$2g = 2f = \frac{\vartheta}{r_0^{\frac{3}{2}}}.$$

Damit wird

$$\cos f = 1 - \frac{1}{8}\frac{\vartheta^2}{r_0^3},$$

---

*) Hierbei wird vielfach angewendet: Ist x gegen 1 klein, so ist $(1+x)(1-x) = 1 - x^2 = 1$, wenn x^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann.

also

$$y = 1 + \tfrac{1}{6}\frac{\vartheta^2}{r_0^3} + \tfrac{7}{360}\frac{\vartheta^4}{r_0^6},$$

dabei wurde das Glied $\tfrac{1}{16} e \cos G \frac{\vartheta^4}{r_0^6}$ (von fünfter Ordnung) vernachlässigt*). Es mag bemerkt werden, daß diese Glieder von y durch die drei ersten von

$$\frac{\vartheta}{r_0^3} : \frac{\sin\vartheta}{r_0^3} = \frac{r_0^2\,\vartheta}{r_0^3} : r_0^2 \sin\frac{\vartheta}{r_0^3},$$

d. i. durch jene des Verhältnisses des Kreissektors (vom Radius r_0) und des zugehörigen Dreieckes dargestellt werden. Mit gleicher Genauigkeit erhält man

$$\frac{1}{y} = 1 - \tfrac{1}{6}\frac{\vartheta^2}{r_0^3} + \tfrac{1}{120}\frac{\vartheta^4}{r_0^6}.$$

Berechnung von

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}\,\frac{y}{y''}.$$

Zu y gehört ϑ und $r_0 = \sqrt{r'r''}$

» y'' » ϑ'' » $r_0 = \sqrt{rr'}$,

in den Gliedern vierter Ordnung kann für r_0 derselbe Wert genommen werden; damit wird

$$\frac{y}{y''} = 1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\vartheta''^2}{(rr')^{\frac{3}{2}}} - \frac{\vartheta^2}{(r'r'')^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{4\,\vartheta^2(\vartheta''^2 - \vartheta^2) - 3(\vartheta''^2 - \vartheta^2)^2}{360\,r_0^6}.$$

Betrachtet man r' als mittleren Radius, setzt

$$r = r' - \alpha\vartheta'', \quad r'' = r' + \alpha\vartheta,$$

so wird

$$\frac{\vartheta''^2}{(rr')^{\frac{3}{2}}} - \frac{\vartheta^2}{(r'r'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{\vartheta''^2 - \vartheta^2}{r'^3} + \tfrac{3}{2}\alpha\frac{\vartheta^3 + \vartheta''^3}{r'^4}.$$

*) Für das Beispiel des Art. 6. beträgt für log y der Einfluß der vernachlässigten Glieder höherer Ordnung + 7 Einheiten der siebenten Stelle.

Zur Bestimmung des Faktors α benutzt man Näherungswerte von r^2 und r''^2. Aus den obigen Werten für r und r'' folgt

$$r^2 = r'^2 - 2\alpha r' \vartheta'', \quad r''^2 = r'^2 + 2\alpha r' \vartheta,$$

$$\alpha = \frac{r''^2 - r^2}{2r'\vartheta'}.$$

Abgesehen vom Faktor $\frac{1}{90}$ kann der erste Posten des Gliedes mit $\vartheta^4 \ldots$ praktisch von der Ordnung fünf, der zweite von der Ordnung sechs angesehen, also dieses Glied vernachlässigt werden. Damit wird

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}(1 - P')$$

$$P' = \frac{(\vartheta'' - \vartheta)\vartheta'}{6r'^3} + \frac{r''^2 - r^2}{8r'^5}(\vartheta\vartheta'' + (\vartheta'' - \vartheta)^2).$$

Berechnung von

$$Q = \frac{\vartheta\vartheta'' r'^2}{yy'' rr'' \cos f \cos f' \cos f''}.$$

$$yy'' = 1 + \frac{1}{6r'^3}(\vartheta^2 + \vartheta''^2)$$

$$\cos f \cos f' \cos f'' = 1 - \frac{1}{8r'^3}(\vartheta^2 + \vartheta'^2 + \vartheta''^2)$$

$$yy'' \cos f \cos f' \cos f'' = 1 - \frac{1}{12r'^3}(\vartheta'^2 + \vartheta\vartheta'')$$

$$\frac{r'^2}{rr''} = 1 + \frac{\alpha}{r'}(\vartheta'' - \vartheta) = 1 + \frac{r''^2 - r^2}{2r'^2}\frac{\vartheta'' - \vartheta}{\vartheta'}.$$

Damit wird

$$Q = \vartheta\vartheta''(1 + Q')$$

$$Q' = \frac{1}{12}\frac{5\vartheta\vartheta'' + (\vartheta'' - \vartheta)^2}{r'^3} + \frac{1}{2}\frac{r''^2 - r^2}{r'^2}\frac{\vartheta'' - \vartheta}{\vartheta'}.$$

In P' und Q' kann $(\vartheta'' - \vartheta)^2$ in der Regel vernachlässigt werden.

4. Die Rechnung der ersten Hypothese wird auf die folgende Art ausgeführt. Man rechnet nach Aufstellung

der Gleichung (11) für die erste Hypothese x', daraus r' und ϱ'. Aus den Gleichungen (12), (13), (14) erhält man ϱ und ϱ'', damit nach der Gleichung (8) des Art. 11. r^2 und r''^2. Mittels der Werte r, r', r'' können nun die genaueren Werte von P und Q der ersten Hypothese nach den obigen Formeln berechnet werden, wobei man noch mittels der Werte für ϱ, ϱ', ϱ'' an den Größen ϑ und ϑ'' in den Hauptfaktoren von P und Q nach Art. 29. die Korrektion wegen Aberration anbringt.

Es mag noch bemerkt werden, daß bereits das erste Glied von P' berücksichtigt wird, wenn statt des Wertes μ der ersten unverbesserten Hypothese

$$\mu' = \left(\frac{b\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta'} + \tfrac{1}{3}\frac{(b-d)(\vartheta''-\vartheta)}{\vartheta'}\right)\frac{\vartheta\vartheta''}{2}$$

gesetzt wird; was dann ratsam ist, wenn die Zwischenzeiten der ersten und zweiten, zweiten und dritten Beobachtung nicht nahezu gleich sind.

Sind aber diese Zwischenzeiten nahezu gleich — bei rund 10 bis 20 Tagen etwa nur um Bruchteile eines Tages verschieden —, so fällt in P' das erste, in Q' das zweite Glied weg; vernachlässigt man das zweite Glied von P', so wird

$$P' = 0, \qquad Q' = \tfrac{5}{12}\frac{\vartheta\vartheta''}{r'^3};$$

es kann daher bereits nach Erhalt eines Näherungswertes von r' die Verbesserung der ersten Hypothese vorgenommen werden.

Für die Bahnbestimmung ist es daher sehr vorteilhaft, wenn die Zwischenzeiten der ersten und zweiten, zweiten und dritten Beobachtung nahezu gleich sind.

5. Zur Erläuterung dieser Korrektionsrechnungen möge zuerst das Beispiel des Art. 18. dienen. Für dieses erhält man

$$\log \mu' = 0.1189370,$$

und damit $x' = 2.050796$, welcher Wert von dem der zweiten Hypothese nur um 312 Einheiten der sechsten Stelle abweicht; ohne diese Verbesserung beträgt der Unterschied 4582 Einheiten.

Die Glieder von P' werden

$$\frac{(\vartheta'' - \vartheta)\,\vartheta'}{6\,r'^3} = \quad 0.0002382$$

$$\frac{r''^2 - r^2}{8\,r'^5}\left(\vartheta\vartheta'' + (\vartheta'' - \vartheta)^2\right) = -\,0.0000197,$$

der Korrektionsfaktor von P also

$$1 - 0.0002185,$$

damit der neue Wert von $\log P$

$$0.0790068,$$

der von jenem der zweiten Hypothese nur um 44 Einheiten der siebenten Stelle abweicht. Bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes von P' beträgt die Abweichung 128 Einheiten.

Für die beiden Glieder von Q' erhält man

$$\frac{1}{12}\,\frac{5\,\vartheta\vartheta'' + (\vartheta'' - \vartheta)^2}{r'^3} = +\,0.001567$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{r''^2 - r^2}{r'^2}\,\frac{\vartheta'' - \vartheta}{\vartheta'} = -\,0.001832$$

$$\text{deren Summe} = -\,0.000265,$$

damit $\log Q = 8.5476437$, welcher Wert von jenem der zweiten Hypothese um 253 Einheiten der siebenten Stelle abweicht. Die Verbesserung des Wertes von Q ist bei diesem Beispiele wegen des verschiedenen Zeichens der beiden nicht sehr verschiedenen Glieder von Q' nur gering.

Bei dem zweiten von Gauß in seiner Theoria motus (Art. 156 und 157) gegebenen Beispiel der Berechnung der Pallas-Elemente bei rund 31 und 40 Tagen Zwischenzeit

zwischen der ersten und zweiten, zweiten und dritten Beobachtung ($22\frac{1}{2}°$ heliozentrischer Bewegung) mit Unterschieden (ohne Aberrationskorrektion) von 14623 und 94555 Einheiten der siebenten Stelle in $\log P$ und $\log Q$, ergibt sich folgendes: Der Unterschied von $\log P$ wird bei Berücksichtigung des ersten Gliedes von P' auf weniger als $\frac{1}{8}$, bei Berücksichtigung beider Glieder nahezu auf Null bezüglich des Wertes der zweiten Hypothese gebracht. Die beiden Glieder von Q' summieren sich, der Unterschied des verbesserten Wertes von $\log Q$ mit jenem der zweiten Hypothese ist nahezu Null. Diese überaus gute Übereinstimmung der verbesserten Werte von $\log P$ und $\log Q$ der ersten Hypothese mit den Gaußschen der zweiten ist wohl nur einer zufälligen Fehlertilgung zuzuschreiben.

Bei dem dritten von Gauß in seiner Theoria motus (Art. 159) gegebenen Beispiel der Berechnung der Ceres-Elemente bei rund 134 und 126 Tagen Zwischenzeit zwischen der ersten und zweiten, zweiten und dritten Beobachtung (63° heliozentrischer Bewegung, wahre Anomalie der ersten Beobachtung 289°, der dritten 352°) liefert die hier angezeigte Verbesserung der ersten Hypothese noch ein gutes Resultat. Man erhält

$$\begin{array}{lll} \text{Erstes Glied } P' & = & 0.0059327 \\ \text{zweites } \;\;„ & = & -\,0.0040264, \\ \text{also } \quad P' & = & +\,0.0019063; \\ \text{erstes Glied } Q' & = & 0.12133 \\ \text{zweites } \;\;„ & = & -\,0.00168, \\ \text{also } \quad Q' & = & +\,0.11965. \end{array}$$

Für $\log P$ und $\log Q$ betragen die Unterschiede der ersten und zweiten Hypothese: bei Gauß $-$ 8578 und $+$ 407604, nach der verbesserten ersten Hypothese $-$ 301 und $-$ 83220 Einheiten der siebenten Stelle.

Die Unsicherheit in der Bestimmung von Q' ist größtenteils in der hier fehlerhaften Annahme einer der Zeit proportionalen Änderung des Radiusvektors begründet.

6. Die in Nr. 4 dieser Note angegebene Verbesserung der ersten Hypothese läßt sich auch auf die Aufgabe des Art. 22. anwenden, ja dieselbe wird überdies dadurch vereinfacht, daß man aus den Näherungswerten für r_1 und r_2 direkt die Größe

$$\alpha = \frac{r_2 - r_1}{\vartheta_{12}}$$

erhält.

Die verbesserten Werte von P_1, P_2, Q_1, Q_2 sind

$$P_1 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{01}}\left(1 + \frac{(\vartheta_{01} - \vartheta_{12})\,\vartheta_{02}}{6\,r_1^3} + \frac{\alpha}{4\,r_1^4}(\vartheta_{01}^3 + \vartheta_{12}^3)\right)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{23}}\left(1 - \frac{(\vartheta_{12} - \vartheta_{23})\,\vartheta_{13}}{6\,r_2^3} - \frac{\alpha}{4\,r_2^3}(\vartheta_{12}^3 + \vartheta_{23}^3)\right)$$

$$Q_1 = \vartheta_{01}\,\vartheta_{12}\left(1 + \frac{5\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{12} + (\vartheta_{01} - \vartheta_{12})^2}{12\,r_1^3} + \frac{\alpha}{r_1}(\vartheta_{01} - \vartheta_{12})\right)$$

$$Q_2 = \vartheta_{12}\,\vartheta_{23}\left(1 + \frac{5\,\vartheta_{12}\,\vartheta_{23} + (\vartheta_{12} - \vartheta_{23})^2}{12\,r_2^3} + \frac{\alpha}{r_2}(\vartheta_{12} - \vartheta_{23})\right)\cdot$$

Sind die Zwischenzeiten je zweier aufeinander folgenden Beobachtungen ziemlich verschieden, so empfiehlt es sich bei der ersten noch unverbesserten Hypothese bei der Auflösung der Gleichungen (3) und (4) die Größen P_1 und P_2 mit ihren ersten Korrektionsgliedern einzuführen.

Zur Erläuterung möge das von Gauß in Art. 171 seiner Theoria motus gegebene Beispiel der Bestimmung der Vestaelemente dienen. Die Zwischenzeiten, in Tagen abgerundet, sind 48, 55, 59, also Summe 162; die erste Hypothese wurde von Gauß fünfstellig berechnet. Aus den Näherungswerten von r_1 und r_2 wird erhalten:

Für die Glieder der Faktoren von P_1 und P_2

− 0.00329	+ 0.00201
− 0.00057	+ 0.00083
− 0.00386	+ 0.00284

Für die Glieder der Faktoren von Q_1 und Q_2

+ 0.01464	+ 0.01887
+ 0.00227	+ 0.00121
+ 0.01691	+ 0.02008.

Damit erhält man als Unterschiede der Logarithmen von P_1, P_2, Q_1, Q_2 in Einheiten der fünften Stelle: II. Hyp. — I. Hyp.

nach Gauß: − 1173, + 112, + 1287, + 1484
verbessert: − 6, − 11, + 559, + 620.

7. Zum Schluß möge noch folgende Bemerkung hier Platz finden.

Die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei Orten stützt sich auf die Hypothesen für die Größen P und Q, deren genaue Werte durch die beiden Systeme von Gleichungen

$$(1)\quad P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}\cdot\frac{y}{y''}, \qquad Q = \frac{\vartheta\vartheta'' r'^2}{yy'' rr'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

$$(2)\quad P = \frac{r \sin(v'-v)}{r'' \sin(v''-v')}, \qquad Q = \frac{4 r'^4 \sin\frac{1}{2}(v'-v)\sin\frac{1}{2}(v''-v')}{p \cos\frac{1}{2}(v''-v)}$$

gegeben sind.

In der ersten Hypothese werden für P und Q resp. $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$ gesetzt. In der zweiten Hypothese werden die genaueren Werte von P und Q nach den Gleichungen (1) gerechnet. Es hat den Anschein, als ob es viel bequemer wäre, die zweite Hypothese nach den Gleichungen (2) zu rechnen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Nach den Gleichungen (1) berechnet man für die neuen Werte von P

und Q die bei der ersten Hypothese vernachlässigten kleinen Größen besonders; die Größen y, y'' können daher etwa mit fünfstelligen Logarithmentafeln gerechnet werden, selbst wenn die Werte von P und Q auf sieben Stellen angesetzt werden. Nach den Gleichungen (2) jedoch gehen die Fehler von r, r', r'', $v' - v$, $v'' - v'$ der ersten Hypothese unmittelbar auf die Größen P und Q über.

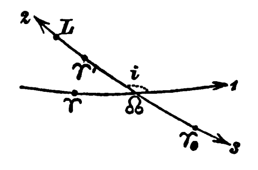
In gleicher Art wurde bei der Verbesserung von P und Q der ersten Hypothese des Verhältnis $r'^2 : rr''$ berücksichtigt.

Dasselbe gilt auch für die folgenden Hypothesen, oder wenn man bei bereits näherungsweise bekannten Bahnen aus den Elementen die erste Hypothese für P und Q rechnet, sowie bei der Bahnbestimmung aus vier Orten.

---

10) S. 52. Direkte und retrograde Bewegung. Statt die Neigung der Bahn nach Gauß von 0 bis 180° zu zählen, zählt man dieselbe auch von 0 bis 90° und unterscheidet zwischen direkter und retrograder Bewegung. Ist die Neigung der Bahn größer als 90°, so nimmt man das Supplement der Neigung, fügt aber hinzu, daß die Bewegung retrograde sei, während man sie in dem anderen Falle (wo $i < 90°$ ist) direkte nennt. In diesem Falle werden die Längen in der Bahn von einem Punkte ♈′ (Fig. 21) gezählt, welcher in der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers eben soweit entfernt ist wie der aufsteigende Knoten vom Frühlingsäquinoktium. Die Längen in der Bahn werden in einer

Fig. 21.



der Bewegung entgegengesetzten Richtung gezählt*). Ist nun Υ_0 der fiktive Frühlingspunkt in der Bahn nach der Gaußschen, Υ' der fiktive Frühlingspunkt nach der älteren (gewöhnlichen) Zählung; bedeuten i, Ω, $\varLambda$ Neigung, Länge des Knotens, Länge in der Bahn nach der Gaußschen, i', Ω', $\varLambda'$ dieselben Größen nach der älteren Zählung, so findet folgender Zusammenhang statt

$$i + i' = 180^\circ, \quad \Omega = \Omega', \quad \varLambda + \varLambda' = 2\,\Omega.$$

Für die Längen des Perihels hat man daher $\varPi + \varPi' = 2\,\Omega$. Ist u das Argument der Breite, d. i. die Entfernung des Himmelskörpers vom Knoten, v die wahre Anomalie, d. i. die Entfernung vom Perihel, beide Größen in der Richtung der Bewegung gezählt, so ist

$$u = \Omega' - \varLambda' = \varLambda - \Omega, \quad v = \varPi' - \varLambda' = \varLambda - \varPi.$$

Für das in Art. 21. gegebene Beispiel hat man $i' = 81^\circ\,1'\,3''$, $\varPi' = 197^\circ\,37'\,51''$, muß aber den Zusatz machen »Bewegung retrograde«.

---

11) S. 85. Methode der kleinsten Quadrate. Es seien aus den n Gleichungen

$$v_1 = m_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$
$$v_2 = m_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$
$$\vdots$$
$$v_n = m_n + a_n x + b_n y + c_n z = 0,$$

wo $m_1, m_2, \ldots m_n$ durch Beobachtung erhalten werden, die Unbekannten x, y, z (deren Anzahl der Einfachheit halber gleich drei gesetzt wurde) zu bestimmen.

*) In der Fig. 21 bedeutet: Pfeil 1 die Richtung der Bewegung der Erde, Pfeil 2 die Richtung der Bewegung des Himmelskörpers, Pfeil 3 die Richtung der Zählung nach der älteren (gewöhnlichen) Methode.

Wären die beobachteten Größen $m_1, m_2, .. m_n$ vollkommen genau, so könnte man aus dreien dieser Gleichungen die Unbekannten x, y, z bestimmen; die übrigen $n-3$ Gleichungen werden für diese Werte der Unbekannten vollkommen erfüllt. Wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler werden die Größen $m_1, m_2, .. m_n$ nicht vollkommen genau sein, es kann daher durch ein System von Werten x, y, z nicht sämtlichen obigen Gleichungen genügt werden.

In diesem Falle bestimmt man die Unbekannten derart, daß allen Gleichungen möglichst genügt wird; man erreicht dieses, indem man die Summe

$$S = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$$

zu einem Minimum macht. Dazu ist erforderlich, daß

$$\frac{dS}{dx} = 0, \qquad \frac{dS}{dy} = 0, \qquad \frac{dS}{dz} = 0$$

wird, welche Gleichungen entwickelt geben

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [am] = 0$$
$$[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bm] = 0$$
$$[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cm] = 0,$$

wo $[aa] = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \cdots + a_n a_n$

$[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ u. s. w. ist.

Auf dieselbe Weise verfährt man, wenn mehr als drei Unbekannte vorhanden sind.

Im vorigen wurde die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß alle (beobachteten) Größen $m_1, m_2, .. m_n$ von gleicher Genauigkeit sind. Ist jedoch eine Beobachtung von größerer Genauigkeit, so sagt man: »die Beobachtung hat ein größeres Gewicht«. Um diesen Umstand in Rechnung zu ziehen, kann man sich die zugehörige Gleichung so oft angesetzt denken, als ihr größeres Gewicht beträgt.

Sind daher (auf irgend eine Einheit bezogen)

$$p_1, p_2, \ldots p_n$$

die Gewichte der Beobachtungen

$$m_1, m_2, \ldots m_n,$$

so mache man die Summe

$$S = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2$$

zu einem Minimum.

Da die Unbekannten aus der Bedingung, daß die Summe S der Quadrate der Fehler $v_1, v_2, \ldots v_n$ ein Minimum wird, bestimmt werden, so heißt diese Bestimmung »Methode der kleinsten Quadrate«.

Für eine Unbekannte ist

$$[paa]\, x + [pam] = 0.$$

Ist $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = -1$, sind ferner die Gewichte aller Beobachtungen gleich, so ist

$$x = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n},$$

d. i. das arithmetische Mittel.

---

12) S. 96. Setzt man $f(x)$ in der Form voraus

$$f(x) = \alpha + \beta \frac{v}{w} + \gamma \left(\frac{v}{w}\right)^2 + \delta \left(\frac{v}{w}\right)^3 + \varepsilon \left(\frac{v}{w}\right)^4,$$

wo $x = a + nw + v$ ist, so erhält man durch passende Bestimmung von $\alpha, \ldots \varepsilon$ für

$$\frac{v}{w} = -2, -1, 0, +1, +2$$

die Werte

$$f(a + \overline{n-2} \cdot w),\quad f(a + n - 1 \cdot w),\quad f(a + nw),$$
$$f(a + \overline{n+1} \cdot w),\quad f(a + \overline{n+2} \cdot w),$$

und alle in der Nähe von $a + nw$ liegenden Funktionswerte, wenn man $f(x)$ als das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe vierter Ordnung betrachten kann. Aus den fünf Werten folgt

$$\alpha = f(a + nw)$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(f'(a + \overline{n + \tfrac{1}{2}} \cdot w) + f'(a + \overline{n - \tfrac{1}{2}} \cdot w))$$
$$- \tfrac{1}{12}(f'''(a + \overline{n + \tfrac{1}{2}} \cdot w) + f'''(a + \overline{n - \tfrac{1}{2}} \cdot w))$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2} f''(a + nw) - \tfrac{1}{24} f^{IV}(a + nw)$$
$$\delta = \tfrac{1}{12}(f'''(a + \overline{n + \tfrac{1}{2}} \cdot w) + f'''(a + \overline{n - \tfrac{1}{2}} \cdot w))$$
$$\varepsilon = f^{IV}(a + nw).$$

Die weitere Entwicklung ist so wie in Art. 38.

Aus den Funktionswerten kann man auch die Werte der Differentialquotienten bestimmen.

Denn es ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \beta \frac{1}{w} + \gamma \frac{2v}{w^2} + \delta \frac{3v^2}{w^3} + \varepsilon \frac{4v^3}{w^4}.$$

Für $v = 0$, d. h. für $x = a + nw$, soll der Differentialquotient mit $f_0'(a + nw)$ bezeichnet werden. Es ist daher

$$w f_0'(a + nw) = \tfrac{1}{2}(f'(a + \overline{n + \tfrac{1}{2}} \cdot w) + f'(a + \overline{n - \tfrac{1}{2}} \cdot w))$$
$$- \tfrac{1}{12}(f'''(a + \overline{n + \tfrac{1}{2}} \cdot w) + f'''(a + \overline{n - \tfrac{1}{2}} \cdot w)),$$

und ebenso

$$w^2 f_0''(a + nw) = f''(a + nw) - \tfrac{1}{12} f^{IV}(a + nw), \text{ u. s. w.}$$

---

13) S. 104. Aus diesen Grundsätzen entwickelte sich die sogenannte Sphärentheorie. Die Weltsphäre wird in neun konzentrische durchsichtige Sphären geteilt, in den ersten sieben befanden sich die Planeten, Mond, Sonne, Merkur u. s. w., in der achten waren die Fixsterne, die neunte, das *primum mobile*, umschloß die übrigen und erteilte ihnen die zur Darstellung der Erscheinung nötigen Bewegungen. Der Widerspruch der festen Sphären mit der epicyklischen Bewegung der Planeten wurde erst durch Peurbach (1423—1461) dadurch gelöst, daß er den Sphären eine solche Dicke gab, daß der Planet mit samt seinem

Epicykel zwischen der äußeren und inneren Fläche eingeschlossen war. Durch Tycho, welcher die Kometen als kosmische Körper erkannte, wurde die Ansicht der festen Sphären zerstört.

---

14) S. 111. Der Unterschied zwischen der Länge in der Bahn und der heliozentrischen Länge, d. i. die Größe $u - (l - \Omega)$ heißt die **Reduktion** auf die Ekliptik.

Aus

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{tang}(l - \Omega)}{\cos i}$$

folgt nach 2) des Art. 44. wegen der Kleinheit von i

$$u - (l - \Omega) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} i^2}{\sin 1''} \cdot \sin 2(l - \Omega).$$

Das Maximum $= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} i^2}{\sin 1''}$ beträgt für den Planeten Mars 52″.8. Kepler findet die Reduktion kleiner als 1′.

Die alten Astronomen vernachlässigten die Reduktion und rechneten die Länge so, als ob die Bewegung des Planeten in der Ekliptik geschehe.

---

15) S. 112. Bestimmung der Bahnelemente der oberen Planeten nach Cl. Ptolemäus.

Für die Elemente des exzentrischen Kreises, d. i. der Exzentrizität und der Lage der Apsidenlinie dienen die Längen zur Zeit der Opposition.

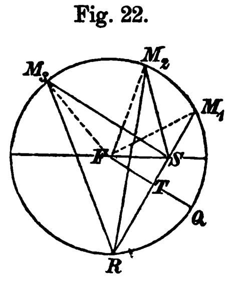
Gegeben sind: Drei wahre Längen zur Zeit der Opposition und die zugehörigen mittleren Bewegungen.

1. Unter der Voraussetzung der »einfachen Exzentrizität«.

Es seien (Fig. 22) M_1, M_2, M_3 drei Orte eines oberen Planeten im exzentrischen Kreise, der Mittelpunkt F das *punctum aequans*.

Die Winkel M_1SM_2, M_2SM_3 sind die wahren Bewegungen von der ersten zur zweiten, zweiten zur dritten Beobachtung, während die Winkel M_1FM_2, M_2FM_3 die zugehörigen mittleren Bewegungen sind.

Fig. 22.



Setzt man $a = 1$, und verlängert man SM_1 bis zum Punkte R und zieht RM_2, RM_3, so kann man aus den Dreiecken SRM_2, SRM_3 die Seiten RM_2, RM_3 durch RS und damit $\sphericalangle RM_2M_3$ bestimmen. Dadurch wird der Bogen M_1QR und damit RT und FT, wo T die Mitte von M_1R ist, bekannt. Bestimmt man außerdem RS aus RM_2 oder RM_3, so erhält man $ST = RS - RT$, und damit FS und $\sphericalangle FST$; wodurch die Exzentrizität und die Lage der Apsidenlinie bekannt ist.

2. Für die »gleiche Teilung der Exzentrizität« kann man in erster Annäherung die Elemente nach 1. bestimmen.

Man bezeichne mit M den Durchschnittspunkt des Äquanten mit der Geraden FL der Fig. 8, so kann man aus den genäherten Elementen den Winkel LSM bestimmen. Diese Rechnung wird für jeden der drei Orte durchgeführt, dadurch erhält man den Fall 1.

Nach dieser Methode findet Ptolemäus für den Planeten Mars

$$e = 0.10, \quad \Pi = 295^\circ\, 30'.$$

Das Verhältnis des Radius des Epicykels zum Radius des Exzenters wird durch eine Beobachtung außerhalb der Opposition bestimmt.

---

16) S. 114. Die Rechnung für die Bestimmung des Punktes L stellt sich so: Man bestimmt die Sehne OC, hierauf im Dreieck COL, in welchem Winkel $COL = 90^\circ$

$+ 2\alpha$ ist, die Seite OL und schließlich im Dreieck OSL die $SL = r$ und Winkel $OSL = 180^\circ - v$.

---

17) S. 128. Diese Bedingungen sind in der Tat hinreichend. Denn wird der Gleichung 1) genügt, so liegen die vier Punkte $M_1, .. M_4$ in einem Kreise, d. h. je zwei Grade SM_1 und $FM_1, .. SM_4$ und FM_4 schneiden sich in Punkten $M_1, .. M_4$, die in dem Umfang eines Kreises liegen. Wird der Gleichung 2) genügt, so liegen die Punkte F, O, S in einer Geraden, wo O der Mittelpunkt des Kreises ist. Der Winkel OM_1S kann nämlich doppelt gerechnet werden, zunächst aus

$$OM_1S = OM_1M_4 - SM_1M_4$$

und aus $O'M_1$, SM_1 und $O'SM_1 = 180^\circ - PSM_1$, wo O' der Durchschnittspunkt der Geraden M_1O mit der Geraden FS ist. Ist nun der Punkt O' mit dem Punkt O identisch, so müssen die beiden Werte von OM_1S übereinstimmen, wenn man $O'M_1$ = Radius des Kreises setzt. Da im Kreisviereck $M_1 .. M_4$ nun $OM_1 = OM_4$ = dem Radius ist, so ist O der Mittelpunkt desselben.

---

18) S. 129. Diese Rechnung ist bei Kepler so geführt: Die heliozentrische Breite folgt aus

$$\sin b = \sin i \sin u.$$

a) Ist der Planet mit der Sonne in Opposition, so ist

$$r = \frac{R \sin \beta}{\sin(\beta - b)}.$$

b) Für Beobachtungen außerhalb der Opposition erhält man r aus

$$r \cos b \sin(l - \lambda) = R \sin(L - \lambda).$$

Für R nimmt Kepler einmal den Wert aus den tychonischen Elementen, und dann den Wert $R = 1$; dadurch erhält er Grenzwerte für die Exzentrizität e, welche ihn zum Verwerfen der stellvertretenden Hypothese veranlaßten.

---

19) S. 130. Daß bei den oberen Planeten diese Erscheinung eintreten muß, erhellt aus folgendem:

Ist (Fig. 13) N die Projektion eines oberen Planeten M auf die Ebene der Erdbahn, S das *punctum aequans*, E_1 und E_2 die Orte der Erde für denselben Punkt M des Planeten, so folgt: Ist S der Mittelpunkt der Erdbahn, so wird Winkel $E_1NS = E_2NS$, wenn Winkel $E_1SN = E_2SN$ ist; ist aber S nicht der Mittelpunkt der Erdbahn, so sind die beiden ersteren Winkel voneinander verschieden, wenn auch letztere Winkel einander gleich sind.

Um die angegebene Lage für den Planeten Mars zu erhalten, berücksichtige man, daß in seiner siderischen Umlaufszeit = 687 Tage die Erde 2 Umläufe — 42° 54′ zurücklegt. Beobachtet man daher den Mars in solcher Lage, daß

$$E_1SN = 21^\circ 27', \quad 42^\circ 54', \ldots$$

ist, so wird nach resp. ein, zwei, .. Umläufen Winkel $E_2SN = E_1SN$ sein. Für Mars stieg der Unterschied der Winkel E_1NS und E_2NS bis auf 2°.

---

20) S. 134. Sind r, r' zwei Distanzen, α, α' die Winkel derselben mit ihren Tangenten an die Bahn, t, t' die Zeiten, in welchen die unendlich kleinen Bogen $l = l'$ beschrieben werden, so ist in Strenge

$$lr \sin\alpha : l'r' \sin\alpha' = t : t', \text{ oder}$$
$$t : t' = r \sin\alpha : r' \sin\alpha'.$$

Der Fehler der Ableitung besteht darin, daß Kepler statt des Verhältnisses $r \sin \alpha : r' \sin \alpha'$ das Verhältnis $r : r'$ setzt, dann aber das Verhältnis $lr : l'r'$ für das Verhältnis der Flächen nimmt; beide Fehler heben sich im Resultate auf. Für die Apsidenlinie ist, wegen $\alpha = \alpha' = 90^\circ$, $t : t' = r : r'$.

---

21) S. 139. Projiziert man den exzentrischen Kreis orthogonal auf eine Ebene, welche durch die Apsidenlinie geht und deren Neigung ε durch $\sin \varepsilon = e$ bestimmt ist, so ist die Neigung der Projektion des Radiusvektors im exzentrischen Kreise gleich der optischen Gleichung φ.

Denn ist M die Projektion des Punktes L des exzentrischen Kreises, so erhält man aus dem durch die Geraden SP, SL, SM bestimmten Dreikante, wenn $\sphericalangle LSM = \lambda$ gesetzt wird, und v die wahre Anomalie des exzentrischen Kreises bedeutet,

$$\sin \lambda = \sin v \sin \varepsilon = e \sin v = \sin \varphi,$$

d. h. $\lambda = \varphi$. Die Punkte M bilden eine Ellipse als Projektion des exzentrischen Kreises. Vergl. Art. 2.

---

22) S. 142. Der Ursprung der Harmonie der Welt — sich äußernd in einer Tonmythe — ist bei den Pythagoräern zu finden. In Platos Republik heißt es: »Auf jeder der acht Weltsphären (Fixsternsphäre, .. Mondsphäre. Vergl. Anm. 13) sitzt eine Sirene, die, mit herumbewegt, einen Ton von sich gibt; alle acht Töne fließen zusammen zu einem übereinstimmenden Einklang.« Cl. Ptolemäus hatte sogar eine Harmonik verfaßt, von deren 3. Buche (vom 3. Kap. an) Kepler eine Übersetzung liefert und seine Resultate mit denen des Ptolemäus vergleicht. Tycho füllte den Weltraum

mit Luft, welche von den kreisenden Weltkörpern erschüttert, die Töne erzeugt. Kepler ist gegen die Ansicht einer musikalischen Harmonie, weil keine Musik des Weltraumes existiert und die Bewegung der Himmelskörper keine so heftige ist, daß man sie hören könnte. Die Harmonien können daher nur vermittelst des Lichtes, d. i. in den sichtbaren Bewegungen der Himmelskörper wahrgenommen werden.

---

23) S. 146. Aus den tychonischen Beobachtungen ist die schnellste und langsamste Winkelbewegung eines jeden Planeten gegeben; durch geringe Änderungen dieser Zahlen erhält man harmonische Verhältnisse für die Vergleichungen 1) und 2) des Art. 59. Umgekehrt: Ist das Gesetz der Harmonien gegeben, so erhält man aus dem Verhältnisse der schnellsten und langsamsten Bewegung die Exzentrizität und die mittlere Bewegung. Aus den Verhältnissen der mittleren Bewegungen erhält man nach dem dritten Gesetze die Verhältnisse der mittleren Entfernungen. Die mittleren Bewegungen bestimmt Kepler dadurch, daß er vom geometrischen Mittel aus der schnellsten und langsamsten Bewegung den halben Unterschied zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel derselben Zahlen abzieht. Ist daher g die größte, k die kleinste Winkelgeschwindigkeit, so ist die mittlere

$$\mu = \sqrt{gk} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{g+k}{2} - \sqrt{gk}\right).$$

---

24) S. 151. Betrachtet man das Bahnstück des Kometen als eine vom Kometen gleichförmig durchlaufene Gerade,

so gilt dies auch von den Projektionen auf die Koordinatenachsen. Es ist daher

$$x' - x : x'' - x' = t'' : t.$$

Schafft man die Brüche weg und setzt $t + t'' = t'$, so wird

$$tx - t'x' + t''x'' = 0,$$

und ebenso

$$ty - t'y' + t''y'' = 0$$

$$tz - t'z' + t''z'' = 0,$$

welche Gleichungen aus den in Art. 15. gemachten Voraussetzungen hervorgehen, die für die praktische Berechnung nicht recht zulässig sind.

---

25) Die Gibbsschen Näherungsformeln für die Dreiecksverhältnisse $n : n' : n''$.

1. Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Himmelskörpers (als Massenpunkt betrachtet) um die Sonne, können auch dadurch integriert werden, daß man die Koordinaten als Potenzreihen nach der Zeit voraussetzt. Nimmt man $1 : k$ mittlere Sonnentage als Zeiteinheit, so erhält man für die Bewegung des Massenpunktes x, y, z die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = 0, \quad x = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots$$

und analog für y und z.

Bricht man mit den Gliedern mit t^4 ab, nimmt als Zeitanfang die Zeit der mittleren Beobachtung, sind

x, y, z die Koordinaten für $t = -\vartheta''$
x', y', z' » » » $t = 0$
x'', y'', z'' » » » $t = \vartheta$,

so erhält man zur Bestimmung der fünf Koeffizienten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 folgende sechs Gleichungen

$$x = A_0 - \vartheta'' A_1 + \vartheta''^2 A_2 - \vartheta''^3 A_3 + \vartheta''^4 A_4$$

$$x' = A_0$$

$$x'' = A_0 + \vartheta A_1 + \vartheta^2 A_2 + \vartheta^3 A_3 + \vartheta^4 A_4$$

$$-\frac{x}{r^3} = 2\,A_2 - 6\vartheta'' A_3 + 12\vartheta''^2 A_4$$

$$-\frac{x'}{r'^3} = 2\,A_2$$

$$-\frac{x''}{r''^3} = 2\,A_2 + 6\,\vartheta A_3 + 12\,\vartheta^2 A_4\,.$$

Aus diesen sechs Gleichungen können die Koeffizienten $A_0, \ldots A_4$ eliminiert werden. Setzt man die Werte von A_0 und A_2 in die erste und dritte, so wird A_1 eliminiert, indem man die erste mit ϑ, die dritte mit ϑ'' multipliziert und dann addiert; setzt man

$$\vartheta = A\,(\vartheta + \vartheta''), \qquad \vartheta'' = A''\,(\vartheta + \vartheta''),$$

so kann man die erhaltene Gleichung durch $\vartheta + \vartheta''$ abkürzen, man erhält

$$Ax + A''x'' = x' - \tfrac{1}{2}\frac{x'}{r'^3}\vartheta\vartheta'' - \vartheta\vartheta''(\vartheta'' - \vartheta)\,A_3$$
$$+ \vartheta\vartheta''(\vartheta^2 - \vartheta\vartheta'' + \vartheta''^2)\,A_4.$$

Setzt man den Wert von A_2 in die vierte und sechste Gleichung, so erhält man

$$A_3 = \left(\frac{x}{r^3} - \frac{x'}{r'^3} + 12\,\vartheta''^2\,A_4\right)\frac{1}{6\vartheta''}$$

$$A_3 = \left(\frac{x'}{r'^3} - \frac{x''}{r''^3} - 12\,\vartheta^2\,A_4\right)\frac{1}{6\vartheta}\,;$$

setzt man diese Werte in die obige Gleichung und ordnet man nach x, x', x'', so erhält man,

$$-\vartheta^2 + \vartheta\vartheta'' + \vartheta''^2 = B, \qquad \vartheta^2 + \vartheta\vartheta'' - \vartheta''^2 = B''$$

gesetzt,

$$\left(A+\frac{1}{6r^3}\vartheta(\vartheta''-\vartheta)\right)x-\left(1-\frac{\vartheta^2+2\vartheta\vartheta''}{6r'^3}\right)x'+A''x''$$
$$=\vartheta\vartheta''B''A_4$$

$$Ax-\left(1-\frac{\vartheta''^2+2\vartheta\vartheta''}{6r'^3}\right)x'+\left(A''-\frac{1}{6r''^3}\vartheta''(\vartheta''-\vartheta)\right)x''$$
$$=\vartheta\vartheta''BA_4\,.$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen A_4 (indem man die erste mit B, die zweite mit $-B''$ multipliziert und addiert) und kürzt durch $\vartheta''-\vartheta$ ab, so erhält man

$$\vartheta\left(1+\frac{B}{12r^3}\right)x-\vartheta'\left(1-\frac{B'}{12r'^3}\right)x'+\vartheta''\left(1+\frac{B''}{12r''^3}\right)x''=0,\ (1)$$
$$B'=\vartheta^2+3\vartheta\vartheta''+\vartheta''^2=5\vartheta\vartheta''+(\vartheta''-\vartheta)^2\,.$$

In gleicher Weise erhält man

$$\vartheta\left(1+\frac{B}{12r^3}\right)y-\vartheta'\left(1-\frac{B'}{12r'^3}\right)y'+\vartheta''\left(1+\frac{B''}{12r''^3}\right)y''=0\ (2)$$

$$\vartheta\left(1+\frac{B}{12r^3}\right)z-\vartheta'\left(1-\frac{B'}{12r'^3}\right)z'+\vartheta''\left(1+\frac{B''}{12r''^3}\right)z''=0,\ (3)$$

welche drei Gleichungen zusammen die Gibbssche Fundamental-(Vektoren-)Gleichung enthalten.

Setzt man

$$N=\vartheta\left(1+\frac{B}{12r^3}\right),\quad N'=\vartheta'\left(1-\frac{B'}{12r^3}\right),\quad N''=\vartheta''\left(1+\frac{B''}{12r''^3}\right),$$

so folgt aus dem Vergleich mit den Gleichungen des Art. 14., daß

$$N:N':N''=n:n':n''\,.$$

2. Die Gibbsschen Größen N, N', N'' können mit Erfolg zur Bestimmung der (heliozentrischen und geozentrischen) Entfernungen des Himmelskörpers benutzt werden. Als Unbekannte werden am zweckmäßigsten (wie in Art. 16, (10)) Größen q, q', q'' benutzt,

$$q = \frac{\varrho}{\cos\beta} + R\cos\delta\,, \quad \cos\delta = \cos\beta\cos(\lambda - L),$$

$$x = \cos\beta\cos\lambda\left(q - R\cos\delta + \frac{R\cos L}{\cos\beta\cos\lambda}\right)$$

$$y = \cos\beta\sin\lambda\left(q - R\cos\delta + \frac{R\sin L}{\cos\beta\sin\lambda}\right)$$

$$z = \sin\beta\,(q - R\cos\delta)\,,$$

$$r^2 = q^2 + p^2, \quad p = R\sin\delta.$$

Diese Größen q, q', q'' werden aus den Gleichungen (1), (2), (3) nach Note 4), 4 auf folgende Art bestimmt. Es seien q, q', q'' Näherungswerte für diese Größen, $q + \Delta q$, $q' + \Delta q'$, $q'' + \Delta q''$ die verbesserten Werte, so müssen letztere den drei Gleichungen (1), (2), (3) genügen. Für N, N', N'' wähle man die Form

$$N = A\left(1 + \frac{B}{r^3}\right), \quad N' = 1 - \frac{B'}{r'^3}, \quad N'' = A''\left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right),$$

indem man die obigen Ausdrücke durch ϑ' dividiert und B statt $\frac{B}{12}$, u. s. w. setzt.

Daraus folgt

$$r dr = q dq\,,$$

$$dx = \cos\beta\cos\lambda\, dq, \quad dy = \cos\beta\sin\lambda\, dq, \quad dz = \sin\beta\, dq,$$

$$d(xN) = N dx + x dN, \text{ u. s. w.}$$

$$d^2(xN) = 2\, dx dN + x d^2N, \text{ u. s. w.}$$

$$dN = -\, q_1\, dq, \qquad q_1 = \frac{3AB}{r^5}\, q$$

$$dN' = \quad q_1'\, dq', \qquad q_1' = \frac{3B'}{r'^5}\, q'$$

$$dN'' = -\, q_1''\, dq'', \qquad q_1'' = \frac{3A''B''}{r''^5}\, q''$$

$$d^2N = \quad \frac{3AB}{r^5}\left(-1 + 5\left(\frac{q}{r}\right)^2\right) dq^2$$

$$d^2N' = -\frac{3B'}{r'^5}\left(-1+5\left(\frac{q'}{r'}\right)^2\right)dq'^2$$

$$d^2N'' = \frac{3A''B''}{r''^5}\left(-1+5\left(\frac{q''}{r''}\right)^2\right)dq''^2 .$$

Setzt man die neuen Gleichungen (1), (2), (3) in der Form

$$(4)\qquad X + X_1 + X_2 = 0$$

$$(5)\qquad Y + Y_1 + Y_2 = 0$$

$$(6)\qquad Z + Z_1 + Z_2 = 0$$

voraus, wo X, Y, Z die Werte der Ausdrücke (1), (2), (3) für die Näherungswerte q, q', q'' bedeuten; X_1, Y_1, Z_1 die Glieder mit $\varDelta q, \varDelta q', \varDelta q''$; X_2, Y_2, Z_2 die Glieder mit $\varDelta q^2, \varDelta q'^2, \varDelta q''^2$,
so wird

$$X_1 = (N\cos\beta\cos\lambda - q_1 x)\varDelta q - (N'\cos\beta'\cos\lambda' + q_1'x')\varDelta q' + (N''\cos\beta''\cos\lambda'' - q_1''x'')\varDelta q''$$

$$Y_1 = (N\cos\beta\sin\lambda - q_1 y)\varDelta q - (N'\cos\beta'\sin\lambda' + q_1'y')\varDelta q' + (N''\cos\beta''\sin\lambda'' - q_1''y'')\varDelta q''$$

$$Z_1 = (N\sin\beta - q_1 z)\varDelta q - (N'\sin\beta' + q_1'z')\varDelta q' + (N''\sin\beta'' - q_1''z'')\varDelta q''.$$

In X_2, Y_2, Z_2 sind nachfolgende Näherungen gestattet

$$A = A'' = \tfrac{1}{2}, \quad B = B'' = \frac{\vartheta\vartheta''}{12}, \quad B' = \frac{5\vartheta\vartheta''}{12},$$

$$r = r' = r'', \quad q = q' = q'', \quad \text{u. s. w.};$$

der mittlere Ort mit dem größten Koeffizienten wird dadurch kaum beeinflußt, während im ersten und dritten sich die Fehler teilweise tilgen; setzt man

$$Q = \frac{\vartheta\vartheta'' q'}{16 r'^5}(\varDelta q^2 + 10\,\varDelta q'^2 + \varDelta q''^2)$$

$$Q' = \frac{1}{q'}\left(-1 + 5\left(\frac{q'}{r'}\right)^2\right),$$

so wird näherungsweise

$$X_2 = Q\,(-2\cos\beta'\cos\lambda' + x'\,Q')$$
$$Y_2 = Q\,(-2\cos\beta'\sin\lambda' + y'\,Q')$$
$$Z_2 = Q\,(-2\sin\beta' \qquad + z'\,Q')\,.$$

Bei der Bestimmung der aus den Gliedern zweiter Ordnung herrührenden Teile von Δq, $\Delta q'$, $\Delta q''$ wird der gemeinsame Faktor Q herausgehoben, und der gemeinsame Nenner in Q einbezogen.

Wegen der wiederholten Aufstellung (d. i. Berechnung von X, Y, Z und der Koeffizienten von X_1, Y_1, Z_1) und Auflösung der Gleichungen (4), (5), (6) bei ganz unbekannten Bahnen wurde der praktische Nutzen der Gibbsschen Methode angezweifelt, da für jede Aufstellung dieser Gleichungen und deren Auflösung der Arbeitsaufwand wohl der Berechnung einer Gaußschen Hypothese als gleichwertig anzusetzen ist. Allein die Konvergenz der Bestimmung der Größen Δq, $\Delta q'$, $\Delta q''$ ist, wie aus der Form von N, N', N'' unmittelbar hervorgeht, eine sehr rasche.

Bei einer ganz unbekannten Bahn setzt man für einen Asteroiden $r = r' = r''$, $3 \log r = 1.3$, für einen Kometen dessen Entfernung von der Erde $= \frac{1}{2}$; rechnet damit q, q', q'' als erste Annahme. Sind die Näherungswerte von $\log q$, $\log q'$, $\log q''$ bereits auf die ersten zwei Stellen genau, so genügt selbst bei größeren Zwischenzeiten eine einmalige Wiederholung der Bestimmung von Δq, $\Delta q'$, $\Delta q''$.

3. In dieser vollständig durchgeführten Rechnung besteht die Gibbssche erste Hypothese. Eine etwa nötige Verbesserung infolge der nicht genügenden Gleichwertigkeit der Verhältnisse $N : N' : N''$ mit $n : n' : n''$ bei größeren Zwischenzeiten wird nach Gibbs auf die folgende Art durchgeführt. Aus rN, $r'N'$, $r''N''$ (nach Art. 8 als Dreiecksseiten betrachtet) rechnet man $v' - v$, $v'' - v'$ und p, wo

$$N - N' + N'' = \frac{AB}{r^3} + \frac{B'}{r'^3} + \frac{A''B''}{r''^3}$$

ist. Damit werden dann nach Art. 6, (9) e, v, v', v'', daraus nach (10) und (11) M, M', M'' und mittels $a = p : 1 - e^2$ aus $M'' - M'$ und $M' - M$ die Zwischenzeiten ϑ_0, ϑ_0'' berechnet; stimmen diese mit den gegebenen (wahren, von der Aberration befreiten) ϑ, ϑ'' überein, so ist die erste Hypothese die definitive. Sind die Unterschiede $\tau = \vartheta_0 - \vartheta$, $\tau'' = \vartheta_0'' - \vartheta''$ nicht verschwindend klein, so wird mit den Zwischenzeiten $\vartheta - \tau$, $\vartheta'' - \tau''$ die Rechnung (Bestimmung der Größen q, q', q'' u. s. w.) wiederholt. Diese Wiederholung liefert die Gibbssche zweite Hypothese; stimmen die neuen berechneten Werte der Zwischenzeiten mit den gegebenen überein, so ist die Rechnung beendet. Für das Ceres-Beispiel genügt bereits die zweite Hypothese.

4. Bestimmt man die Gaußschen Größen P und Q aus den Gibbsschen, so erhält man

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \frac{1 + \frac{B''}{12 r''^3}}{1 + \frac{B}{12 r^3}}$$

$$Q = \frac{\frac{1}{6}\left(B' + \frac{\vartheta}{\vartheta'}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 B + \frac{\vartheta''}{\vartheta'}\left(\frac{r'}{r''}\right)^3 B''\right)}{1 - \frac{B'}{12 r'^3}}.$$

Setzt man $r = r' = r''$ und vernachlässigt die Glieder vierter Ordnung, so erhält man für P den Wert mit dem ersten Korrektionsgliede, für Q den Näherungswert $\vartheta\vartheta''$. Berücksichtigt man die Glieder vierter Ordnung, wobei

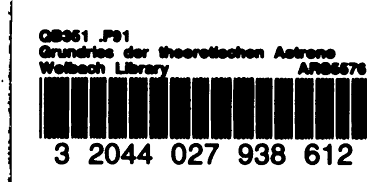
$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 = 1 + \frac{3\alpha}{r'}\vartheta'', \quad \left(\frac{r'}{r''}\right)^3 = 1 - \frac{3\alpha}{r'}\vartheta$$

gesetzt wird, so erhält man die verbesserten Werte von P und Q von Note 9), 3.

Die Gibbsschen Ausdrücke lassen sich auch auf die in Art. 15, 16 gegebene Gaußsche Methode anwenden, wodurch für die erste Hypothese die Genauigkeit der Gibbsschen Ausdrücke mit der Leichtigkeit der Ausführung der Rechnung nach Gauß vereint werden kann. Für das in Art. 18 gegebene Beispiel wird die Rechnung in folgender Weise ausgeführt. Man löset die Gleichung (11) auf, wobei der verbesserte Wert von μ d. i. μ' benutzt wird. Nun wird (wie in Note 9), 4) fünfstellig r, r', r'' bestimmt und damit N, N', N'' gerechnet. Die Werte $N : N'$, $N'' : N'$ werden in die Gleichung (7) eingesetzt, wobei wegen der großen Faktoren b und d siebenstellige Tafeln benutzt werden, damit erhält man einen genaueren Wert von $\varrho' : \cos \beta'$; mit diesem wird die Berechnung von r, r', r'' fünfstellig wiederholt, wodurch man neue verbesserte Werte erhält, deren Logarithmen nur um einige Einheiten der letzten Stelle von den wahren abweichen und für eine definitive Berechnung von N, N', N'' genügen.

Register.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.


QB351 .F91
Grundriss der theoretischen Astrono
Wolbach Library ARB5576
3 2044 027 938 612




32044027938612